Государственное бюджетное общеобразовательное учреждение Московской области

«Сергиево-Посадский физико-математический лицей»

***Консультация для учителей района***

***«Решение систем логических уравнений»***

Учитель информатики и ИКТ

Барулина Н.Н.

2019

*Лучший способ решения задач этого типа основан на двух идеях:*

* + 1. *замена переменных (если она возможна), позволяющая сократить количество неизвестных и таким образом упростить решение*
    2. *последовательное решение уравнений, начиная с первого, затем система из первых двух, первых трех и т.д.*

1. **Сколько различных решений имеет система уравнений**

**¬(X1 ≡ X2) ∨ (X3 ≡ X4) = 1**

**¬(X3 ≡ X4) ∨ (X5 ≡ X6) = 1**

**¬(X5 ≡ X6) ∨ (X7 ≡ X8) = 1**

**¬(X7 ≡ X8) ∨ (X9 ≡ X10) = 1**

**где X1, X2, …, X10 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

***Решение:*** X1 ≡ X2 заменим через Y1, X3 ≡ X4 заменим через Y2 и т.д. Получим систему

¬ Y1+ Y2= 1

¬ Y2+ Y3= 1

¬ Y3+ Y4= 1

¬ Y4+ Y5= 1

Используя свойство импликации A→B=¬A+B получим

Y1→ Y2= 1

Y2→ Y3= 1

Y3→ Y4= 1

Y4→ Y5= 1

Перейдем от системы уравнение к одному уравнению. Т.к. каждое уравнение равно 1, то и их произведение будет равно 1

(Y1→ Y2)\*(Y2→ Y3)\*(Y3→ Y4)\*(Y4→ Y5)= 1

После 1 не может стоять 0, т.к. 1→0=0, поэтому решениями системы будут следующие наборы

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Вернемся к нашим первоначальным переменным. Через переменную Y мы заменили эквивалентность. Эквивалентность имеет значение истина в двух наборах и ложь в двух наборах.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |  |
| 02 | 02 | 02 | 02 | 02 | 25 |
| 02 | 02 | 02 | 02 | 12 | 25 |
| 02 | 02 | 02 | 12 | 12 | 25 |
| 02 | 02 | 12 | 12 | 12 | 25 |
| 02 | 12 | 12 | 12 | 12 | 25 |
| 12 | 12 | 12 | 12 | 12 | 25 |

Значит количество решений 25\*6=32\*6=192

Ответ: 192

1. **Сколько различных решений имеет система логических уравнений**

**(x1 → x2) → (x3 → x4) = 1**

**(x3 → x4) → (x5 → x6) = 1**

**где x1, x2, …, x6 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

Решение: произведем замену x1 → x2=у1

у1→у2=1

у2→у3=1

Получим решения

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| у1 | у2 | у3 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Следствие имеет значение ложь в одном наборе и значение истина в 3 наборах

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| у1 | у2 | у3 |  |
| 01 | 01 | 01 | 1 |
| 01 | 01 | 13 | 3 |
| 01 | 13 | 13 | 32 |
| 13 | 13 | 13 | 33 |

Количество решений: 1+3+9+27=40

Ответ: 40

1. **Сколько различных решений имеет система логических уравнений**

**X1 → X2 ∨ X3 ∧ ¬X4 = 1**

**X3 → X4 ∨ X5 ∧ ¬X6 = 1**

**X5 → X6 ∨ X1 ∧ ¬X2 = 1**

**где X1, X2, …, X6 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

¬ X1+ X2+ X3\*¬X4=1

¬ X3+ X4+ X5\*¬X6=1

¬ X5+ X6+ X1\*¬X2=1

Рассмотрим решения первого уравнения, добавим решения которые появляются при добавлении X5 X6, исключим решения, неподходящие под третье уравнение

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 X6 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | (00)(01)(10)(11) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | (00)(01)(10)(11) |
| 0 | 0 | 1 | 0 | (10) |
| 0 | 0 | 1 | 1 | (00)(01)(10)(11) |
| 0 | 1 | 0 | 0 | (00)(01)(10)(11) |
| 0 | 1 | 0 | 1 | (00)(01)(10)(11) |
| 0 | 1 | 1 | 0 | (10) |
| 0 | 1 | 1 | 1 | (00)(01)(10)(11) |
| 1 | 0 | 0 | 0 |  |
| 1 | 0 | 0 | 1 |  |
| 1 | 0 | 1 | 0 | (10) |
| 1 | 0 | 1 | 1 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | (00)(01)(10)(11) |
| 1 | 1 | 0 | 1 | (00)(01)(10)(11) |
| 1 | 1 | 1 | 0 | (10) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | (00)(01)(10)(11) |

Ответ: 28

1. **Сколько различных решений имеет система уравнений**

**((X1 ≡ X2) ∧ (X3 ≡ X4)) ∨ (¬(X1 ≡ X2) ∧ ¬(X3 ≡ X4)) = 0**

**((X3 ≡ X4) ∧ (X5 ≡ X6)) ∨ (¬(X3 ≡ X4) ∧ ¬(X5 ≡ X6)) = 0**

**((X5 ≡ X6) ∧ (X7 ≡ X8)) ∨ (¬(X5 ≡ X6) ∧ ¬(X7 ≡ X8)) = 0**

**((X7 ≡ X8) ∧ (X9 ≡ X10)) ∨ (¬(X7 ≡ X8) ∧ ¬(X9 ≡ X10)) = 0**

**где X1, X2, …, X10, Y1,Y2…,Y10 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

Решение: замена X1 ≡ X2=Y1. Получаем

Y1\*Y2+¬Y1\*¬Y2=0, что есть эквивалентность Y1≡ Y2=0.

Для первого уравнений только два решения

|  |  |
| --- | --- |
| Y1 | Y2 |
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

При рассмотрении последующих уравнений количество решений не изменяется

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Возвращаемся к переменным

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |  |
| 02 | 12 | 02 | 12 | 02 | 25 |
| 12 | 02 | 12 | 02 | 12 | 25 |

Ответ: 25\*2=26=64

1. **Сколько различных решений имеет система уравнений**

**¬X1 ∨ X2 = 1**

**¬X2 ∨ X3 = 1**

**...**

**¬X9 ∨ X10 = 1**

**где X1, X2, …, X10 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

Решение:

X1 →X2=1

X2 →X3=1

...

X9 →X10=1

Заменяем одним уравнением

(X1 →X2)∧( X2 →X3)∧( X3 →X4)∧( X4 →X5)∧(X5 →X6)∧( X6 →X7)∧( X7 →X8)∧( X8 →X9) )∧( X9 →X10)=1

Уравнение имеет 11 решений

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 | X8 | X9 | X10 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ответ: 11

1. **Сколько различных решений имеет система уравнений?**

**(x1 → x2)∧(x2 → x3)∧(x3 → x4)∧(x4 → x5) = 1**

**(у1 → у2)∧(у2 → у3)∧(у3 → у4)∧(у4 → у5) = 1**

**x1 ∨ у1 = 1**

**где x1,x2,…,x5, у1,у2,…,у5 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

Решение:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Y1 | Y2 | Y3 | Y4 | Y5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Для каждого решения X приходиться 6 решений. Всего решений на первые два уравнения 6\*6=36.

По третьему уравнению нам надо исключить решения, где X1 и Y1 равны 0. Это 5\*5=25 решений.

36-25=11

Ответ: 11 решений.

1. **Сколько различных решений имеет система уравнений**

**(X1 ∧ X2) ∨ (¬X1 ∧ ¬X2) ∨ (X1 ≡ X3) = 1**

**(X2 ∧ X3) ∨ (¬X2 ∧ ¬X3) ∨ (X2 ≡ X4) = 1**

**...**

**(X8 ∧ X9) ∨ (¬X8 ∧ ¬X9) ∨ (X8 ≡ X10) = 1**

**где X1, X2, …, X10 – логические переменные? В ответе не нужно перечислять все различные наборы значений переменных, при которых выполнено данное равенство. В качестве ответа нужно указать количество таких наборов.**

Решение: Свернем эквивалентность

(X1 ≡ X2) ∨ (X1 ≡ X3) = 1

(X2 ≡ X3) ∨ (X2 ≡ X4) = 1

...

(X8 ≡ X9) ∨ (X8 ≡ X10) = 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 |
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

|  |  |
| --- | --- |
| 00 | 00 |
| 01 |
| 01 | 10 |
| 10 | 01 |
| 11 | 10 |
| 1 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 | X8 | X9 | X10 |
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 2 | 1+2 | 1+3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 2 | 2+1 | 3+1 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Ответ: 20 решений.

1. **Дана система логических уравнений**

**(x1 ∧ ¬x2) ∨ (¬y1 ∧ y2) ∨ (¬x1 ∧ y1) = 0**

**(x2 ∧ ¬x3) ∨ (¬y2 ∧ y3) ∨ (¬x2 ∧ y2) = 0**

**…**

**(x6 ∧ ¬x7) ∨ (¬y6 ∧ y7) ∨ (¬x6 ∧ y6) = 0**

**(¬x7 ∧ y7) = 0**

**где x1,x2,…,x7, y1, y2,…,y7 – логические переменные. Найдите количество решений этой системы.**

Решение:

Рассмотрим первое уравнение

(x1 ∧ ¬x2) ∨ (¬y1 ∧ y2) ∨ (¬x1 ∧ y1) = 0

У нас дизъюнкция. Уравнение будет равно 0, если каждое слагаемое будет равно 0.

Можно это уравнение разбить на 3.

x1 ∧ ¬x2=0

¬y1 ∧ y2=0

¬x1 ∧ y1=0

Повторим это с оставшимися уравнениями.

Объединим уравнения следующим образом

(x1 ∧ ¬x2) ∨(x2 ∧ ¬x3) ∨(x3 ∧ ¬x4) ∨(x4 ∧ ¬x5) ∨(x5 ∧ ¬x6) ∨(x6 ∧ ¬x7) =0

(¬y1 ∧ y2) ∨(¬y2 ∧ y3) ∨(¬y3 ∧ y4) ∨(¬y4 ∧ y5) ∨(¬y5 ∧ y6) ∨(¬y6 ∧ y7) =0

(¬x1 ∧ y1) ∨ (¬x2 ∧ y2) ∨ (¬x3 ∧ y3) ∨ (¬x4 ∧ y4) ∨ (¬x5 ∧ y5) ∨ (¬x6 ∧ y6) ∨ (¬x7 ∧ y7)=0

Преобразуем уравнения

x1 ∧ ¬x2= ¬ (¬x1+ x2)= ¬ (x1 → x2)

¬ (x1 → x2)=0, значит x1 → x2=1

Первое уравнение можно преобразовать к виду

(x1 → x2) ∧(x2 → x3) ∧(x3 → x4) ∧(x4 → x5) ∧(x5 → x6) ∧(x6 → x7) =1

Его решениями будут следующие наборы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| X1 | X2 | X3 | X4 | X5 | X6 | X7 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Аналогично преобразуем второе и третье уравнения.

Получим

(y7 → y6) ∧(y6 → y5) ∧(y5→ y4) ∧(y4 → y3) ∧(y3 → y2) ∧(y2 → y1) =1

(y1 → x1) ∧(y2 → x2) ∧(y3 → x3) ∧(y4 → x4) ∧(y5 → x5) ∧(y6 → x6)=1

Решениями второго уравнения будут следующие наборы:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| y7 | y6 | y5 | y4 | y3 | y2 | y1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Без учета третьего уравнения всего решений будут 8\*8=64. Исключим решения, которые дают 0 в третьем уравнении.

64-7-6-5-4-3-2-1=36

Ответ: 36