ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

«СЕРГИЕВО-ПОСАДСКИЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»

141300, Московская обл., г. Сергиев Посад, ул. К. Маркса, д.3. Тел.\ факс: (496) 540-45-48

E-mail: sp1000@yandex.ru http://ФМЛ.РФ

Лицензия Министерства образования Московской обл.: 50Л01 № 0010064 от 18.10.2019 (регистрационный № 78184

# Лекция для учителей

# Решение уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр

Учитель высшей квалификационной категории: Маслова Галина Юрьевна

2019-2020 учебный год

***Какой теоретический материал необходимо знать, чтобы приступить к решению уравнений и неравенств с модулем и параметром?***

1.Определение модуля

2. Геометрический смысл модуля

3. Свойства модуля

4.Применение геометрического смысла модуля к решению уравнений и неравенств

5.Равносильные переходы в решении уравнений и неравенств с модулем

6.Графики функций, содержащих абсолютную величину.

# Аналитический метод решения уравнений с модулем, содержащих параметр

При использовании аналитического метода решения уравнений и неравенств с параметром используются равносильные переходы, приводящие к решению линейных и квадратных уравнений и неравенств с параметром.

**№.1**

Найти все значения параметра, при которых уравнение. $\left|x^{2}-2ax+7\right|=\left|6a-x^{2}-2x-1\right|$

 имеет более двух корней.

**Решение:**

$$\left|x^{2}-2ax+7\right|=\left|6a-x^{2}-2x-1\right|< =>$$

$$\left[\begin{array}{c}x^{2}-2ax+7=6a-x^{2}-2x-1\\x^{2}-2ax+7=-6a+x^{2}+2x+1\end{array}< =>\left[\begin{array}{c}2x^{2}-2x\left(a-1\right)+8-6a=0\\2x\left(a+1\right)=6a+6\end{array}\right.\right.$$

$$\left[\begin{array}{c}x^{2}-x\left(a-1\right)+4-3a=0 (1)\\x\left(a+1\right)=3\left(a+1\right)(2)\end{array}\right.$$

1.При а=-1 второе уравнение совокупности имеет бесконечно много решений.Тогда, не зависимо от первого уравнения совокупность , а , следовательно, исходное урвнение, имеет более двух корней.

2.Пусть а отлично от -1.

Исходное уравнение имеет более двух корней , если уравнение (1) имеет два различных корня, отличных от 3.

 Таким образом,$\left\{\begin{array}{c}a\ne 1\\\left(a-1\right)^{2}-4\left(4-3a\right)>0\\9-3\left(a-1\right)+4-3a\ne 0\end{array}< =>\left\{\begin{array}{c}a\ne 1\\a\ne \frac{8}{3}\\a^{2}+10a-15>0\end{array}\right.\right.$

$ -5-2\sqrt{10} -1 -5+2\sqrt{10} \frac{8}{3}$

Ответ: при $aϵ\left(-\infty ;-5-2\sqrt{10}\right)∪\left\{-1\right\}∪\left(-5+2\sqrt{10};\frac{8}{3}\right)∪\left(\frac{8}{3};+\infty \right) $уравнение имеет более двух корней

**№.2**

Найти все значения параметра, при которых неравенство. $\left|\frac{x^{2}+ax+1}{x^{2}+x+1}\right|<3$ выполняется при всех значениях переменной х.

 **Решение.**

$$\left|\frac{x^{2}+ax+1}{x^{2}+x+1}\right|<3< =>\left|x^{2}+ax+1\right|<\left|3x^{2}+3x+3\right|< =>$$

$$\left(4x^{2}+\left(a+3\right)x+4\right)\left(-2x^{2}+(a-3\right)x-2)<0< =>$$

$$\left(4x^{2}+\left(a+3\right)x+4\right)\left(\left(2x^{2}-(a-3\right)x+2\right)>0$$

Неравенство верно при любых значениях переменной, если каждый из множителей принимает только положительные значения, т.е.

$$\left\{\begin{array}{c}\left(a+3\right)^{2}-64<0\\\left(a-3\right)^{2}-8<0\end{array}\right.< =>\left\{\begin{array}{c}a+3<4\\a-3<2\end{array}< =>\left\{a<1\right.\right.$$

Ответ: при a<1 неравенство верно при любых значениях переменной.

# Графический метод решения уравнений с модулем, содержащих параметр

При решении уравнений и неравенств графическим методом преобразуют уравнение к виду , когда левая часть равенства задает фиксированную функцию, а правая-функцию с параметром . В результате построения получаем фиксированный график и подвижный, который располагаем так, чтобы выполнялось условие задачи.

**№3**

 Найти все значения а, при каждом и которых уравнение $\sqrt{1-2x}=a-3\left|x\right|$ имеет более двух корней$. $

**Решение.**

Определим, что при *a* < 0 уравнение не имеет решений, так как левая часть не меньше нуля, а правая меньше нуля.

 Определим, для каких *a* ≥ 0 графики функций $y=\sqrt{1-2x} и y=a-3\left|x\right|$ имеют более двух общих точек при $x\leq \frac{1}{2}$.

Заметим, что при всех *a* ≥ 1 уравнение имеет хотя бы один корень, не превосходящий нуль.

При$ 1<a<\frac{3}{2}$ уравнение имеет два решения.

При$ \frac{3}{2}\leq a<m$ , где *m* — значение *a*, которому соответствует точка касания графика функций $y=\sqrt{1-2x} и y=m-3x$.

Найдем m (Для нахождения приравниваем значения функций и значения производных функций в точке касания):





Таким образом, при $a=\frac{5}{3}$ уравнение имеет два решения, а при больших *a* — только одно решение. Значит,$a\in [\frac{3}{2};\frac{5}{3})$ — единственный промежуток, на котором уравнение имеет больше двух решений (то есть три).

**№ 4**

Найдите все значения *а*, при каждом из которых решения неравенства .

 образуют отрезок длины 1.

**Решение**

Перенесем единицу:

Построим графики функций $y=\left|2x-a\right|$



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при$\left[\begin{array}{c}\frac{a}{2}\leq -4\\\frac{a}{2}\geq -2\end{array}\right.$



 Решения образуют отрезок длины 1, если 

куда $a=-\frac{19}{2}$



Решения образуют отрезок длины 1, если 

ткуда $a=-\frac{5}{2}$

Ответ.$ a=-\frac{19}{2} ,a=-\frac{5}{2}$

№5

Найдите все значения параметра, при которых множеством решений неравенства  является отрезок.

**Решение.**

Перепишем неравенство в виде, удобном для построения графиков:



Нарисуем эскизы графиков правой и левой части:



Из рисунка видно, что график правой части неравенства лежит выше графика левой при -1<a<5.

Заметим, что при a=1 решением кроме отрезка становится еще и точка

 x=3,что противоречит условию.

При дальнейшем уменьшении a в решение будет попадать еще один отрезок с правым концом в точке x=3.

Левый конец будет сдвигаться вплоть до случая касания при котором решение снова превратится в один отрезок.

Рассмотрим случай касания:





Итак, интервал [1;1,25) не удовлетворяет условию задачи.

Ответ. 


# Использование монотонности функций при решении уравнений и неравенств с модулем и параметром

№6

Найдите все целые отрицательные значения параметра *а*, при каждом из которых существует такое действительное число b>a, что неравенство 

**не выполнено.**

**Решение.**

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство



выполнено при любом b>a.

Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству



причём функция F(B) строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно , первоначальное неравенство выполняется для всех b>a тогда и только тогда, когда 

 то есть 

Отметим, что при $a\geq 0$ полученное неравенство верно. Если$a<0, $то неравенство равносильно неравенству



Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение

 a=-1, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении a=-1 существует такое b>a ,что неравенство не выполнено.

Ответ .-1

# Подводим итоги

Мы рассмотрели несколько приемов в решении уравнений и неравенств с модулем, содержащих параметр. Набор уравнений и неравенств так настолько разнообразен, что каждое требует индивидуального подхода, но приемы , в основном, остаются теми же, что мы рассмотрели в данной лекции.

По