МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**МОСКОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

**«СЕРГИЕВО-ПОСАДСКИЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»**

141300, Московская область, г. Сергиев Посад, ул. Карла Маркса, д.3. Тел.\ факс: (496) 540-45-48

E-mail: sp1000@yandex.ru http://ФМЛ.РФ

Лицензия Министерства образования Московской области: 50 Л 01 № 0010064 от 18.10.2019 (регистрационный № 78184)

Решение задач с использованием симметрий, оценок, монотонности

Методическая разработка

Учитель математики Гавриленко Г.Ю.

2019-2020 учебный год

Большие трудности у старшеклассников вызывают уравнения и неравенства, которые решаются функциональными методами. Это методы, которые используют при своем исследовании свойства функций: ограниченность, монотонность, четность, периодичность, ОДЗ и т.д. На основе анализа полученных исследований или появляются дополнительные условия (учет которых в значительной мере упрощает решение задач), или делается вывод о том, что задача решения не имеет. Обучающиеся должны уметь анализировать, проводить рассуждения, выбирать наиболее рациональный путь при решении уравнений или неравенств.

Для лучшего закрепления данного подхода необходимо решать задания не только при подготовке к итоговой аттестации, но и при обобщении и систематизации знаний после каждого раздела математики, начиная с простых примеров и постепенно увеличивая уровень сложности.

* **Рассмотрим более подробно использование ограниченности функции.** При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль. Можно предположить, что метод оценки используется:
* в одном задании присутствуют различного рода функции: алгебраические, тригонометрические, показательные, логарифмические  и т.п., что затрудняет или делает невозможным использование стандартных методов;
* если в одной части соотношений стоят ограниченные функции, а в другой конкретные числа, или в левой и правой части стоят ограниченные функции;
* использование неравенства Коши;
* если в задаче переменных больше чем уравнений или неравенств;
* в задачах с параметрами.

К графическим иллюстрациям мы обращаемся лишь для того, чтобы иметь представление о том, какие геометрические образы соответствуют полученным оценкам, что очень помогает сделать вывод о количестве корней решаемого задания.

Рассмотрим несколько примеров:

1. **Использование ограниченности функций:**

***Задание 1***

*Решите уравнение:*

Решение:

Таким образом, левая часть равенства , а правая часть равна . Равенства возможно при условии, что левая часть равна . Это возможно при .

Ответ: .

***Задание 2***

*Решите уравнение:*

Решение:

ОДЗ:

Равенства возможны при условии .

Т.к. и целые, то решением системы является единственное число .

Ответ: .

1. **В одном задании присутствуют различного рода функции:**

**Равенство возможно только при условии, что левая и правая части одновременно равны числу**

***Задание 3***

*Решите уравнение:*

Решение:

Рассмотрим отдельно левую и правую часть равенства

Правая часть:

Левая часть:

Значит, равенство достигается при условии, что правая и левая части одновременно равны 1. Данное уравнение равносильно системе уравнений:

.

Ответ: .

***Задание 4***

*Решите уравнение:*

Решение:

Левая часть равенства:

.

Правая часть равенства:

.

Значит, равенство возможно при условии, что левая и правая части были равны 4:

.

Ответ: .

1. **Использование неравенства Коши**

**и , a>0**

***Задание 5***

*Решите уравнение:*

Решение:

ОДЗ:

,

,

,

,

,

,

,

.

Учитывая ОДЗ, получаем, что данное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

***Задание 6***

*Докажите, что если числа a и b положительные, то*

Решение:

Согласно неравенству Коши, имеем:

.

Учитывая, что сумма взаимно обратных положительных чисел боьше или равна 2, получаем:

, что и требовалось доказать.

1. **В задаче переменных больше чем уравнений**

***Задание 7***

*Решите уравнение в целых числах:*

Решение:

.

Функция f(x)= принимает значения в интервале .

Функция g(y)= принимает значения в интервале .

То общих целых значений у них всего три: 0; 1;2. При этом значения функции могут принимать только целые, так как решаем уравнение в целых числах.

Уравнение f(x) = 0 имеет корни 0 и 1, а уравнение g(y) = 0 имеет корни -1 и 2. Это даёт 4 пары решений.

Уравнение f(x) = 2 имеет корни -1 и 2, а уравнение g(y) = 2 имеет корни 1 и 0. Это даёт ещё 4 пары решений, все из которых подходят.

Ответ: (0;-1); (0;2); (1;2); (1; -1); (-1;1); (-1; 0); (2; 0); (2;1).

1. **Задачи с параметром**

***Задание 8***

*При каких значениях 𝑝 данная система имеет решения*

*.*

Решение:

.

Тогда левая часть равенства , а правая часть равенства .

Значит, равенство возможно только, когда правая и левая части одновременно равны 1.

Второе уравнение равносильно системе уравнений:

.

Первое уравнение имеет целые коэффициенты и, чтобы исходная система имела решения, корни должны удовлетворять следующим условиям x1+ x2=-p, т.к. один корень целый , то и второй корень тоже должен быть целым, а из равенства x1x2=2, получаем, что x1 нечетный делитель 2. Значит, он равен 1 или -1.

При x=1 находим p=-3, при x=-1, то p=3.

Ответ: при p= система имеет решения.

* **Рассмотрим использование монотонности функции.** Решение уравнений с помощью монотонности функций позволяет быстро и просто найти корень уравнения (либо доказать, что уравнение корней не имеет). Использование возрастания и убывания функций при решении уравнений опирается на следующие теоремы.

1) **Если на некотором промежутке функция f(x) возрастает (или убывает), то уравнение f(x)=a на этом промежутке имеет единственный корень либо не имеет корней (a — постоянная величина (число)).**

2) **Если на некотором промежутке функция f(x) возрастает, а функция g(x) убывает (либо наоборот), то уравнение f(x)=g(x) на этом промежутке имеет единственный корень либо не имеет корней.**

Доказав, что уравнение имеет на промежутке не более чем один корень, можно попытаться определить его подбором.

Если функция имеет несколько промежутков возрастания и убывания, каждый из них следует рассмотреть отдельно.

При определении монотонности используем следующие утверждения:

* сумма возрастающих функций — возрастающая функция;
* сумма убывающих функций — убывающая функция;
* прибавление или вычитание постоянной величины не влияет на монотонность функции, если к возрастающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим возрастающую функцию (если к убывающей функции прибавить (или вычесть) постоянную величину, получим убывающую функцию).

***Задание 1***

*Решите уравнение*

Решение:

x>0, так как правая часть равенства положительна и при любом значении x.

Функция f(x)= при x>0 непрерывна строго возрастающая как произведение двух непрерывных положительных и строго возрастающих функций. Значит при x>0 функция f(x)= принимает каждое свое значение ровно одной точке является решением данного уравнения и это единственное решение.

Ответ: .

Часто оказывается достаточным рассмотреть не всю область определения функции, а лишь ее подмножество, на котором функция принимает значения, удовлетворяющие некоторым условиям (например, только неотрицательные значения).

***Задание 2***

*Решите неравенство*

Решение:

ОДЗ:

При левая часть неравенства принимает положительные значения, а правая отрицательные, значит неравенство верно при любом .

При функция f(x)= убывает, а функция g(x)= возрастает и если уравнение имеет корень на этом промежутке, то он единственный. x=1 является решением полученного уравнения.

Докажем, что функция g(x)= строго возрастает на промежутке .

,

при любом , значит функция строго возрастает при любом .

Заметим, что при функция f(x)= принимает значения больше 1, а функция g(x)= меньше 1. То все значения являются решениями исходного неравенства. А при функция f(x)= принимает значения меньше 1, а функция g(x)= больше 1.

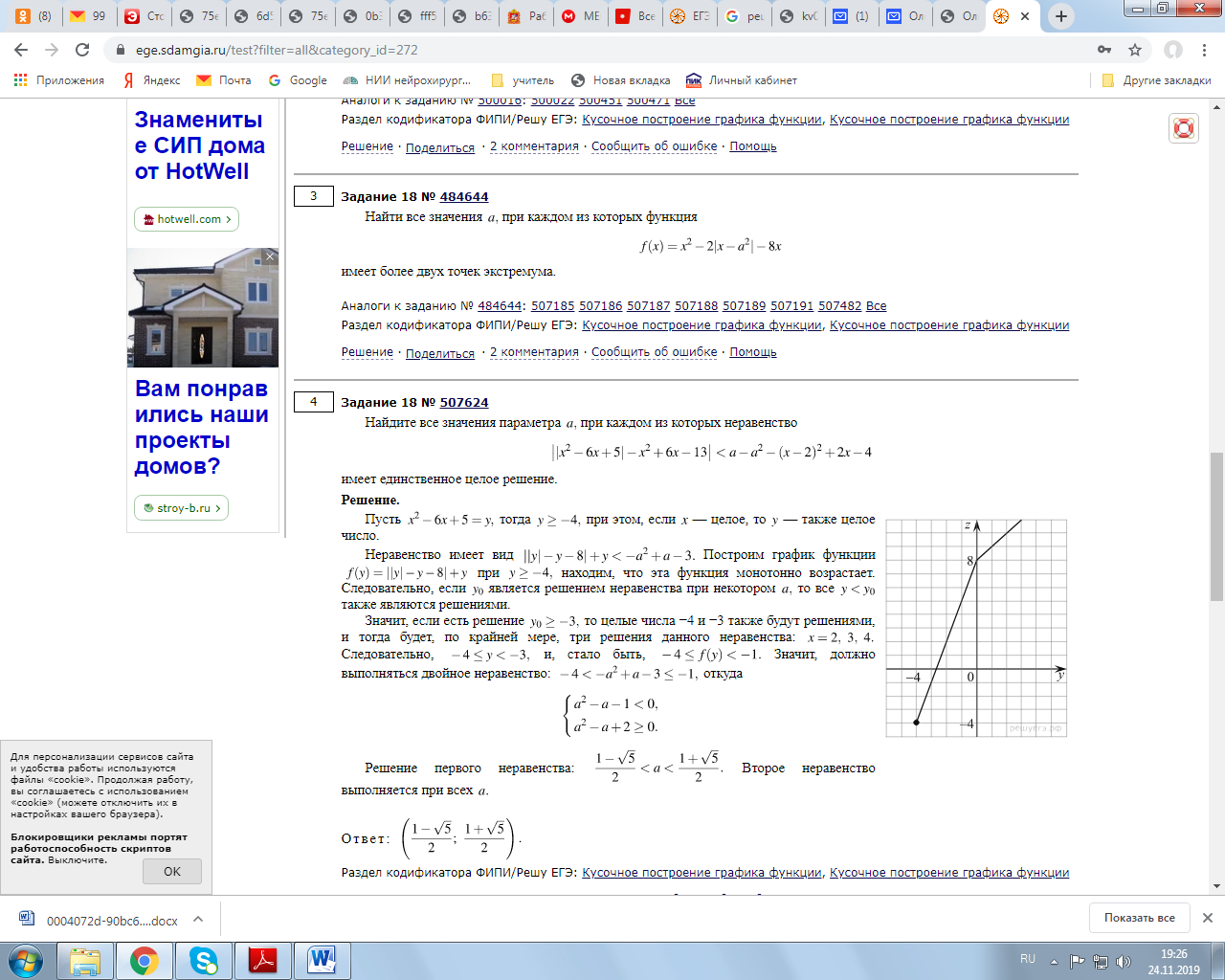
Итак, решениями неравенства являются все значения

Ответ: .

***Задание 3***

*Найти все значения a, при каждом из которых неравенство*

*имеет единственное целое решение.*

Решение:

Пусть y= y=, . При этом, если x – целое, то и y – целое число.

Неравенство примет вид: .

Построим график функции f(y)=.

Находим, что эта функция монотонно возрастает.

Следовательно, если является решением неравенства при некотором , то все также являются решениями.

Значит, есть решение , то целые числа –4 и –3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, три решения данного неравенства:   
. Следовательно, , и .

Значит, должно выполняться двойное неравенство: , откуда

Решение первого неравенства: . Второе неравенство выполняется при всех .

Ответ:

***Задание 4***

*Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение*

*не имеет действительных решений.*

Решение:

Пусть , тогда , и уравнение принимает вид:

.

Заметим, что уравнение имеет вид: для .

Производная положительна при всех , поэтому функция возрастает на всей числовой прямой. Тогда уравнение равносильно уравнению .

Вернемся к исходной переменной:

.

Полученное уравнение, а вместе с ним и исходное, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен, откуда .

Ответ: .

***Задание 5***

*Решите уравнение:*

Решение:

Заметим, что – корень уравнения.

Функция и функция возрастают в области определения уравнения, то есть на луче .

Преобразовать уравнение к такому виду, чтобы одна часть представляла собой убывающую, а другая – возрастающую функцию, не удается.

Поступим по-другому. Найдем производные функций:

и

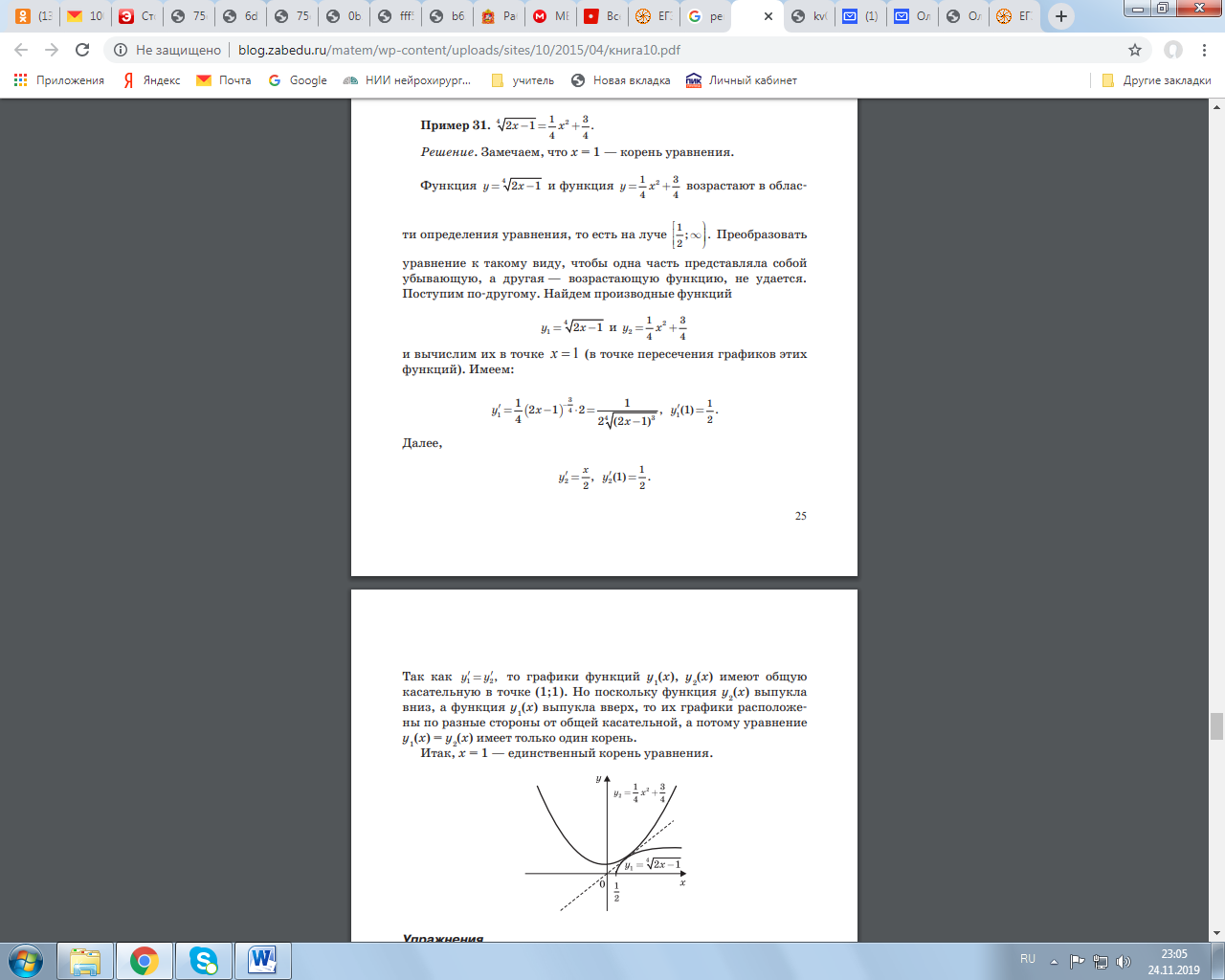
и вычислим их в точке (в точке пересечения графиков этих функций). Имеем:

, .

Далее,

, .

Так как , то графики функций и имеют общую касательную в точке (1;1). Но поскольку функция выпукла вниз, а функция выпукла вверх, то их графики расположены по разные стороны от общей касательной, а потому уравнение имеет только один общий корень.

Итак, – единственный корень уравнения.

***Задание 6***

* **Рассмотрим использование симметрии в решении задач**

Если при некотором преобразовании переменных уравнение не меняет своего вида («переходит само в себя»), то мы говорим, что это уравнение симметрично относительно данного преобразования. Если уравнение обладает некоторой симметрией, то такой же симметрией обладают и все его решения. Значит, не решая уравнение и исходя лишь из соображений симметрии, мы можем заранее предвидеть некоторые свойства его решений! Например, требуется найти такие значения параметра, при которых уравнение имеет заданное число решений. Тогда, заметив симметрию данного уравнения, мы сможем получить необходимые условия на параметр, и останется лишь проверить, какие из найденных условий являются достаточными. Если уравнение имеет хотя бы один отличный от нуля корень, то число, ему противоположное также будет корнем уравнения. Поэтому если в задаче стоит вопрос "При каких значениях параметра уравнение имеет единственное решение?", то этим единственным решением будет число x=0.

Отсюда следует алгоритм решения задач этого класса задач.

1. Проверяем, является ли уравнение симметрично относительно переменной.

2. Если это так, находим, при каких значениях параметра x=0 является корнем уравнения. Для этого подставляем в уравнение x=0 и решаем его относительно параметра. Находим соответствующие значения параметра.

3. Подставляем в исходное уравнение последовательно найденные значения параметра и отбираем те, при которых уравнение имеет единственное решение.

***Задание 1***

*Найдите все значения параметра , при которых уравнение*

*имеет единственное решение.*

Решение:

Если является корнем уравнения, то и также является корнем этого уравнения. Следовательно, уравнение симметрично относительно . В задание требуется, чтобы корень был единственным, то единственным решением может быть .

Найдем, при каком значении является корнем уравнения.

,

откуда

.

Это – необходимое условие на (только при таком наше уравнение может иметь нулевое решение). Теперь вопрос в том, является ли это условие достаточным; то есть, окажется ли при нулевое решение и в самом деле единственным, или же исходное уравнение будет иметь и другие корни помимо нуля.

Для выяснения достаточности условия подставим данное значение в исходное уравнение:

.

Перепишем это следующим образом:

.

Тангенс является возрастающей функцией на интервале . Косинус, являющийся аргументом тангенса, принимает значения из отрезка , а этот отрезок находится внутри интервала . Следовательно, справедливо неравенство , то есть левая часть уравнения не превосходит 1. В то же время его правая часть не меньше 1, и равенство возможно лишь в том случае, когда обе они равны 1, то есть при .

Итак, мы показали, что условие является достаточным: при уравнение имеет единственное (нулевое) решение.

Ответ: .

***Задание 2***

*Найдите все значения , при каждом из которых уравнение*

*имеет единственный корень.*

Решение:

Запишем уравнение в виде

Если является корнем исходного уравнения, то и является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если , то есть . Подставим значение в уравнение:

,

откуда либо , либо или .

При уравнение принимает вид . Корнями этого уравнения являются числа , то есть уравнение имеет ровно три корня.

При и при уравнение принимает вид .

При это уравнение сводится к уравнению , которое не имеет корней.

При получаем уравнение , которое имеет единственный корень.

При получаем уравнение , которое не имеет корней.

Таким образом, при и при исходное уравнение имеет единственный корень .

Ответ: и .

В данной работе разобраны задания 10-11 классов олимпиадного характера или задания с параметром типа ЕГЭ № 18. Для лучшего закрепления такого подхода необходимо решать задания не только при подготовке к итоговой аттестации, но и при обобщении и систематизации знаний об элементарных функциях, начиная с простых примеров и постепенно увеличивая уровень сложности.

Примеры:

1. Использование ОДЗ
2. Использование ограниченности функции.
3. Использование свойства монотонности:
   * + 1. =x
       2. +17
       3. Найти все значения параметра, при котором уравнение имеет корни