**Центральные точки треугольника,**

**связанные с некоторыми экстремумами**

Тимофеев Д.В.

МБОУ «Физико-математический лицей, г. Сергиев Посад, Россия

В работе для данного произвольного треугольника построены вписанный и вневписанный равносторонние треугольники (их определения даны). Найден вписанный и вневписанный треугольники наименьшей площади. Показано, что их центры являются центральными точками данного треугольника.

**Ключевые слова:** вписанный треугольник, вневписанный треугольник, поворот плоскости, барицентрические координаты, центральная точка треугольника, точка Лемуана, точка пересечения медиан.

**Введение и определения**

Точка называется центральной, если её барицентрические координаты как функции длин сторон обладают свойствами цикличности, симметрии по двум аргументам и однородностью [1].

Равносторонний треугольник называется вписанным в данный произвольный треугольник, если две его вершины лежат на двух сторонах данного треугольника, а третья на третьей стороне или её продолжении.

Равносторонний треугольник называется вневписанным для данного произвольного треугольника, если две его вершины лежат на продолжениях сторон данного треугольника, а третья на третьей стороне или её продолжении.

Примеры центральных точек: точка пересечениямедиан имеет барицентрические координаты 1:1:1; центр вписанной окружности - a:b:c; точка пересечения высот - В энциклопедии, составленной профессором Кларком Кимберлингом [2], количество центральных точек превышает 5000. Она содержит как точки, известные ещё Евклиду, так и точки, открытые в настоящее время.

**Цель работы:** узнать, являются ли центральными точками треугольника центры вписанного в него и вневписанного равносторонних треугольников минимальной площади (цель работы подсказана наблюдением, что большинство замечательных в интуитивном смысле точек треугольника являются центральными [1]).

**1.Построение вписанного треугольника**

Введём декартову систему координат, как показано на рисунке: сторона АС рассматриваемого треугольника лежит на оси ОХ, начало координат совпадает с вершиной B1 вписанного треугольника, треугольник АВС расположен в полуплоскости Y ≥0.Обозначения длин сторон и величин углов традиционные.

Y

B

C1

A1

A(-b1,0)

B1(0,0)

C(b2,0)

X

Совершим поворот плоскости относительно точки B1 на угол 60 градусов по часовой стрелке.

Вершина A1 получается как точка пересечения стороны АВ, повёрнутой относительно B1 на угол φ=600, и стороны ВС.

В принятых обозначениях уравнение прямой, содержащей сторону ; уравнение прямой, содержащей повёрнутую сторону ;

координаты вершины А1 находятся из решения соответствующей системы уравнений:

,

.

Аналогично находятся координаты вершины С1 как точки пересечения стороны АВ и повёрнутой стороны ВС:

,

.

**2.Вычисление координат центра вписанного треугольника**

Вычислим квадрат стороны А1В1:

;

наименьшее значение полученное выражение имеет при

Зная мы можем вычислить декартовы координаты вершин А1 и С1 и центрa M( треугольника A1B1C1 *(*здесь обозначим

*):*

,

,

Барицентрические координаты точки М можно найти как площади треугольников АВМ, ВСМ, САМ [1]:

,

Сократив на общий множитель, получим эти координаты в виде:

Выразив с помощью теоремы синусов синусы углов через стороны и радиус R описанной окружности, найдём окончательно:

.

**3.Вычисление координат центра вневписанного треугольника**

Барицентрические координаты центра вневписанного треугольника можно получить, заменив угол

.

Барицентрическое уравнение прямой, проходящей через две найденные точки:

p·(b2-c2)+q·(c2-a2)+r·(a2-b2)=0.

Эта прямая проходит через точку пересечения медиан 1:1:1 и точку Лемуана a2:b2:c2.

Заметим, что любая прямая, проходящая через 2 центральные точки, содержит бесконечно много центральных точек.

Действительно, пусть уравнение прямой в барицентрических координатах:

=0.

Точка с координатами p1+λ·p2:q1+λ·q2:r1+λ·r2 лежит на этой прямой. Если данные точки центральные, а функция λ(a,b,c) удовлетворяет определению центральной точки ,то точка с координатами p1+λ·p2:q1+λ·q2:r1+λ·r2 тоже центральная, при условии, что координаты данных точек имеют одинаковую степень однородности, а λ-нулевую.

**Вывод**

Полученные координаты удовлетворяют условиям, сформулированным выше, значит, найденные точки – центральные. Эти центральные точки отсутствуют в энциклопедии Кимберлинга [2].

**Используемая литература**

1. *А. Г. Мякишев*. Элементы геометрии треугольника. Библиотека “Математическое просвещение”Bып.19.-M.:МЦНМО, 2002.
2. <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>