Управление образования

Администрации Сергиево-Посадского района

Муниципальное общеобразовательное учреждение

«Физико-математический лицей»

**Педагогическая ассамблея**

**Методы определения периода гармонических колебаний**

Мастер-класс

Учитель Русаков А.В.

2011-2012 учебный год

**Методы определения периода гармонических колебаний**

Задачи на механические колебания традиционно считаются «любимыми» на различного рода олимпиадах по физике и «нелюбимыми» в курсе общеобразовательной средней школы. Поэтому на дополнительных факультативных занятиях и на курсах олимпиадной подготовки имеет смысл обратить повышенное внимание на гармонические колебания.

Рассмотрим здесь основные методы решения задач, связанные с определением периода гармонических колебаний.

**1)** Один из методов (наиболее известный) связан с основным признаком гармонических колебаний. Как известно, если тело отклонить от положения равновесия и отпустить, и окажется, что оно начнет возвращаться в положение равновесия с ускорением, величина которого прямо пропорциональна величине отклонения тела, то движение тела будет представлять собой гармонические колебания. Причем коэффициент пропорциональности между ускорением тела и величиной отклонения от положения равновесия является квадратом циклической частоты колебаний. Естественно предполагается при этом, что никаких сил сопротивления движению нет. Следовательно, процедура определения периода колебаний состоит в следующем: выводим систему из положения равновесия (мысленно), отклонив тело на величину х, и записываем второй закон Ньютона. Если второй закон Ньютона удается свести к виду $a\_{x}=-αx$, где α – некоторая постоянная величина, то период колебаний, можно сказать, уже нашли:

$$α=ω\_{0}^{2}=\frac{4π^{2}}{T^{2}} ⇒ T=\frac{2π}{\sqrt{α}}$$

Как известно, произвольные колебания далеко не всегда являются гармоническими, а, так называемые, малые колебания чаще всего гармонические. Поэтому, записав второй закон Ньютона, очень часто приходится выполнить приближение малых колебаний, то есть учесть тот факт, что величина х очень мала.

Проиллюстрируем все сказанное простыми примерами.

**Задача 1**. Найти период колебаний жидкости в U - образной трубке постоянного сечения и с вертикальными коленами, если общая длина трубки, заполненной жидкостью равна L. Жидкость идеальная.

x

x

Δm

**Решение**

Рассмотрим идеальную жидкость в U - образной трубке. В положении равновесия верхние уровни жидкости в обоих коленах трубки находятся на одинаковом уровне. Выведем жидкость из положения равновесия. Предположим, что в результате какого-то воздействия верхний уровень жидкости в левом колене понизился на х, а в правом – соответственно повысился на х. Предоставленная самой себе жидкость начинает двигаться под действием силы тяжести нескомпенсированного заштрихованного столбика жидкости высотой 2х. Обозначим за m массу всей жидкости, за Δm – массу жидкости, которая ушла из левого колена и, соответственно, пришла в правое. Тогда второй закон Ньютона для жидкости запишется в виде:

$$ma=2Δmg$$

Если S – площадь поперечного сечения трубки, а ρ – плотность жидкости, то $m=ρSL$, а $Δm=ρSx$. Подставив массы во второй закон Ньютона, получаем:

$$ρSLa=2ρSgx ⇒ a=\frac{2g}{L}x$$

Видно, что ускорение жидкости прямо пропорционально отклонению от положения равновесия х, а, значит:

$$ω\_{0}^{2}=\frac{4π^{2}}{T^{2}}=\frac{2g}{L} ⇒ T=2π\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

**Задача 2**. Посередине горизонтального закрытого цилиндра длиной L и площадью сечения S находится тонкий поршень массой m. Слева и справа от поршня идеальный газ под давлением Р. Определить период малых колебаний поршня. Трения нет, температуру считать постоянной.

**Решение**

x

L

**Р1S**

**Р2S**

***a***

Выведем поршень из положения равновесия, сместив его, например, вправо на х. При этом объем правой части цилиндра уменьшится, а левой увеличится. Если в положении равновесия давления на поршень справа и слева были равны и уравновешивали друг друга, то при смещении поршня вправо давление в правой части цилиндра окажется больше, чем в левой. В результате появится равнодействующая сил давления, направленная влево и возвращающая поршень в положение равновесия. Обозначим давление в левой части цилиндра после смещения поршня за Р1, а в правой части – за Р2. Так как температура постоянна, то можно записать уравнение Бойля-Мариотта для каждой части цилиндра:

$$PV\_{0}=P\_{1}V\_{1} ⇒ PS\frac{L}{2}=P\_{1}S\left(\frac{L}{2}+x\right) ⇒ P\_{1}=\frac{PL}{L+2x}$$

$$PV\_{0}=P\_{2}V\_{2} ⇒ PS\frac{L}{2}=P\_{2}S\left(\frac{L}{2}-x\right) ⇒ P\_{2}=\frac{PL}{L-2x}$$

Запишем второй закон Ньютона для поршня:

$$ma=P\_{2}S-P\_{1}S=PSL\left(\frac{1}{L-2x}-\frac{1}{L+2x}\right)=\frac{4PLx}{L^{2}-4x^{2}}$$

Получается, что ускорение поршня не пропорционально отклонению х, а, значит, произвольные колебания поршня не гармонические. В условии задачи требуется определить период малых колебаний поршня. Поэтому надо воспользоваться условием малых отклонений от положения равновесия. Если отклонение х мало по сравнению с длиной цилиндра (x << L), то в знаменателе слагаемым, содержащим $x^{2}$, можно пренебречь. Тогда получаем:

$$a≈\frac{4PS}{mL}x$$

В приближении малых колебаний ускорение оказывается прямо пропорциональным величине отклонения. Отсюда определяем период малых колебаний:

$$ω\_{0}^{2}=\frac{4π^{2}}{T^{2}}=\frac{4PS}{mL} ⇒ T=π\sqrt{\frac{mL}{PS}}$$

**2)** Второй метод определения периода гармонических колебаний базируется на законе сохранения энергии. Этот метод является менее известным и его используют в основном при решении задач более высокого уровня сложности. Кроме того, существуют случаи, когда второй закон Ньютона записать очень сложно. Рассмотрим второй метод.

Если система совершает колебательное движение, то периодически изменяются все характеристики ее движения, а также ее кинетическая и потенциальная энергия. При этом потенциальная энергия системы минимальна в момент, когда система проходит положение равновесия, и максимальна в момент максимального отклонения от положения равновесия. Кинетическая энергия, наоборот, максимальна при прохождении положения равновесия и равна нулю в момент максимального отклонения. Если потенциальную энергию системы в момент прохождения положения равновесия принять за ноль, то получается, что в этот момент вся механическая энергия системы состоит только из кинетической энергии, а в момент максимального отклонения – только из потенциальной энергии. Причем, если колебания не затухающие, то есть потерь энергии нет, то, согласно закону сохранения энергии, кинетическая энергия системы в положении равновесия должна быть равна ее потенциальной энергии в момент максимального отклонения.

Кинетическая энергия системы пропорциональна квадрату скорости, то есть для максимальной кинетической энергии можно написать: $W\_{кин}=Av\_{max}^{2}$, где *А* – коэффициент пропорциональности, определяемый инерционными характеристиками системы, а $v\_{max}$ - максимальная скорость. Потенциальная энергия системы пропорциональна квадрату отклонения от положения равновесия, то есть для максимальной потенциальной энергии можно написать: $W\_{пот}=Bx\_{max}^{2}$, где *В* – коэффициент, определяемый упругими свойствами системы, а $x\_{max}$ - величина максимального отклонения от положения равновесия. Из закона сохранения энергии для незатухающих колебаний следует:

$$W\_{кин}=W\_{пот} ⟹ Av\_{max}^{2}=Bx\_{max}^{2}$$

Для гармонических колебаний (а подавляющее большинство малых свободных незатухающих колебаний являются гармоническими) существует связь между максимальной скоростью и максимальным отклонением (амплитудой): $v\_{max}=ω\_{0}x\_{max}$, где $ω\_{0}={2π}/{T}$ - циклическая частота колебаний. Подставляя это в закон сохранения энергии, получаем:

$$Aω\_{0}^{2}x\_{max}^{2}=A\frac{4π^{2}}{T^{2}}x\_{max}^{2}=Bx\_{max}^{2}$$

Отсюда сразу выражаем период колебаний:

$$T=2π\sqrt{\frac{A}{B}}$$

А теперь проиллюстрируем этот метод на примере решения некоторых конкретных задач.

**Задача 3***.* Тонкий обруч массой М и радиусом R может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр обруча. На обруче закреплен небольшой грузик массой m. Найти период малых колебаний обруча.

**Решение**

Сложность решения этой задачи первым методом заключается в том, что здесь надо записать второй закон Ньютона для вращательного движения, а для этого надо знать что такое момент инерции. Но понятия о моменте инерции и основном уравнении динамики вращательного движения твердого тела в курсе физики общеобразовательной школы не даются. Поэтому на «законных основаниях» эту задачу мы можем решить только вторым методом.

Повернем обруч с грузиком на малый угол α, отклонив систему от положения равновесия. Если в положении равновесия потенциальную энергию грузика принять за ноль (потенциальная энергия обруча при повороте не изменяется), то при повороте мы сообщили системе потенциальную энергию $W\_{пот}=mgh$, где h – высота, на которую поднялся грузик в результате поворота обруча. Но высота равна

α

h

$$h=R\left(1-\cos(α)\right)=2Rsin^{2}\left(\frac{α}{2}\right)$$

Колебания малые. Это означает, что угол отклонения очень мал. Но для малого угла α выполняется приближение: $\sin(\left(\frac{α}{2}\right))≈\frac{α}{2}$. Значит, для потенциальной энергии системы при отклонении получаем выражение:

$$W\_{пот}=2mgRsin^{2}\left(\frac{α}{2}\right)≈\frac{1}{2}mgRα^{2}$$

Отпустим обруч и он начнет поворачиваться, возвращаясь в положение равновесия. Проходя положение равновесия обруч вместе с грузиком будут иметь кинетическую энергию $W\_{кин}=\frac{1}{2}(M+m)v^{2}$, где v – линейная скорость обруча и грузика. Но $v=ωR$, где ω – угловая скорость вращения обруча. Значит $W\_{кин}=\frac{1}{2}(M+m)ω^{2}R^{2}$. Согласно закону сохранения механической энергии начальная потенциальная энергия, сообщенная грузику при отклонении, должна полностью перейти в кинетическую энергию обруча и грузика в момент возвращения в положение равновесия. То есть:

$$\frac{1}{2}mgRα^{2}=\frac{1}{2}(M+m)ω^{2}R^{2}$$

Но α – максимальное угловое отклонение системы от положения равновесия, а ω – максимальная угловая скорость системы. Если предположить, что колебания гармонические, то эти две величины должны быть связаны соотношением: $ω=ω\_{0}α$. Подставив это в последнее выражение, получаем:

$$mgα^{2}=(M+m)ω\_{0}^{2}α^{2}R$$

Отсюда сразу получаем период колебаний:

$$T=\frac{2π}{ω\_{0}}=2π\sqrt{\frac{R(M+m)}{mg}}$$

Далее рассмотрим задачу, похожую на задачу 1.

**Задача 4.** Найти период колебаний жидкости в U - образной трубке с вертикальными коленами. Площади поперечного сечения колен трубки равны S1 и S2, а общая длина трубки, заполненной жидкостью равна L. Жидкость идеальная, участком, соединяющем колена трубки пренебречь.

**Решение**

Решить эту задачу через второй закон Ньютона практически невозможно. Связано это с тем, что здесь жидкость течет по трубке переменного сечения. При переходе жидкости из одного колена трубки в другое на нее со стороны стенок трубки будут действовать силы давления, которые должны быть учтены при записи второго закона Ньютона, но мы про них знаем только то, что они есть и больше ничего. В задаче 1 на жидкость со стороны стенок тоже действуют силы давления. Но силы давления, действующие в идеальной жидкости всегда направлены перпендикулярно поверхности и для трубки постоянного сечения их проекции на направление течения жидкости равны нулю и они не влияют на характер течения жидкости. В данной задаче в области перехода из одного сечения в другое силы давления направлены не перпендикулярно скорости потока и дают свой вклад в ускорение жидкости. Итак, решаем задачу через закон сохранения энергии.

x1

x2

Δm

Δh

S1

S2

Пусть в результате некоторого воздействия верхний уровень в левом колене понизился на х1, а в правом – повысился на х2. Так как идеальная жидкость несжимаема, то можно написать $x\_{1}S\_{1}=x\_{2}S\_{2}$. Для того, чтобы определить изменение потенциальной энергии жидкости, заметим, что потенциальная энергия части жидкости, находящейся ниже верхнего уровня в левом колене не изменилась. Изменение энергии связано с тем, что заштрихованный объем жидкости из левого колена перешел в заштрихованный объем в правом колене. Обозначим Δm – масса жидкости в заштрихованном объеме. Тогда изменение потенциальной энергии жидкости равно $ΔW\_{п}=ΔmgΔh$. Здесь $Δh=\frac{1}{2}(x\_{1}+x\_{2})$ - изменение высоты центра тяжести заштрихованного объема жидкости. Кроме того $Δm=ρS\_{1}x\_{1}$. С учетом всех замечаний получаем, что изменение потенциальной энергии жидкости можно записать в виде:

$$ΔW\_{п}=\frac{1}{2}ρgS\_{1}x\_{1}^{2}\left(1+\frac{S\_{1}}{S\_{2}}\right)$$

При возвращении в положение равновесия жидкость будет двигаться, то есть у нее будет кинетическая энергия. Пусть при этом скорость жидкости в левом колене равна v1, а в правом – v2. Тогда кинетическая энергия жидкости равна

$$W\_{к}=\frac{m\_{1}v\_{1}^{2}}{2}+\frac{m\_{2}v\_{2}^{2}}{2}$$

Так как высота верхних уровней жидкости в положении равновесия равна $\frac{1}{2}L$, то

$$m\_{1}=\frac{1}{2}ρLS\_{1}; m\_{2}=\frac{1}{2}ρLS\_{2}$$

Кроме того, запишем еще уравнение неразрывности: $S\_{1}v\_{1}=S\_{2}v\_{2}$. С учетом всего записанного, кинетическую энергию жидкости можно записать в виде:

$$W\_{к}=\frac{1}{4}ρLS\_{1}v\_{1}^{2}\left(1+\frac{S\_{1}}{S\_{2}}\right)$$

Запишем закон сохранения энергии ($ΔW\_{п}=W\_{к}$):

$$\frac{1}{2}ρgS\_{1}x\_{1}^{2}\left(1+\frac{S\_{1}}{S\_{2}}\right)=\frac{1}{4}ρLS\_{1}v\_{1}^{2}\left(1+\frac{S\_{1}}{S\_{2}}\right)$$

Так как х1 – максимальное отклонение жидкости от положения равновесия в левом колене, а v1 – ее максимальная скорость, то можно написать связь $v\_{1}=ω\_{0}x\_{1}$. В результате получаем:

$$gx\_{1}^{2}=\frac{1}{2}Lv\_{1}^{2}=\frac{1}{2}Lω\_{0}^{2}x\_{1}^{2}$$

Отсюда получаем период колебаний жидкости:

$$T=\frac{2π}{ω\_{0}}=2π\sqrt{\frac{L}{2g}}$$

**Задача 5.** Один конец жесткой невесомой штанги длины L шарнирно закреплен в точке О, а к ее другому концу прикреплена пружина жесткости k. На расстоянии b от точки О на штанге закреплен небольшой по размерам груз массы m. В положении равновесия штанга горизонтальна, а ось пружины вертикальна. Найти период малых колебаний груза в вертикальной плоскости.

О

m

**Решение**

Пусть система находится в положении равновесия. Примем, что ее потенциальная энергия при этом равна нулю. При этом следует заметить, что в положении равновесия пружина является растянутой силой тяжести груза и у пружины имеется некоторая начальная потенциальная энергия деформации. Однако сила тяжести груза в положении равновесия оказывается скомпенсированной начальной силой упругости пружины. Поэтому приняв потенциальную энергию пружины в положении равновесия равной нулю, мы тем самым как бы скомпенсировали силу тяжести и далее при решении задачи мы можем потенциальную энергию груза в поле тяжести Земли не учитывать.

Отклоним систему от положения равновесия, опустив конец штанги вниз. Если при этом штанга повернулась на малый угол α, то пружина растянулась на $x=αL$. При этом пружина приобрела потенциальную энергию деформации

$$W\_{пот}=\frac{kx^{2}}{2}=\frac{1}{2}kα^{2}L^{2}$$

Отпустим систему и она начнет возвращаться в положение равновесия. При прохождении положения равновесия у груза будет кинетическая энергия

$$W\_{кин}=\frac{mv^{2}}{2}$$

Если ω – угловая скорость вращения штанги при прохождении положения равновесия, то $v=ωb$ и

$$W\_{кин}=\frac{1}{2}mω^{2}b^{2}$$

Приравнивая кинетическую и потенциальную энергии и замечая опять, что величины ω и α связаны соотношением $ω=ω\_{0}α=\frac{2πα}{T}$, получаем выражение для периода колебаний:

$$T=\frac{2πb}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Рассмотрим все-таки более подробно, почему мы можем потенциальную энергию системы в положении равновесия объявить равной нулю и далее не рассматривать силу тяжести, действующую на груз?

Пусть в положении равновесия у пружины имеется начальная деформация х0. Эта начальная деформация определяется равенством моментов силы тяжести и силы упругости:

$$kx\_{0}L=mgb ⟹ x\_{0}=\frac{mgb}{kL}$$

Таким образом, в положении равновесия потенциальная энергия деформации пружины равна:

$$W\_{0}=\frac{1}{2}kx\_{0}^{2}$$

Отклоним штангу вниз так, чтобы длина пружины увеличилась на х. Потенциальная энергия пружины станет равна

$$W\_{1}=\frac{1}{2}k\left(x\_{0}+x\right)^{2}$$

Но при этом груз опустится на величину $h={bx}/{L}$ и его потенциальная энергия в поле тяжести Земли уменьшится на $W\_{2}=mgh$. Изменение потенциальной энергии системы будет при этом равно $ΔW=W\_{1}-W\_{2}-W\_{0}$. После раскрытия скобок и приведения подобных получается

$$ΔW=\frac{1}{2}kx^{2}$$

То есть изменение потенциальной энергии груза в поле тяжести Земли действительно уходит.

**Задача 6.** Грузик массой m подвешен к потолку на двух одинаковых пружинках жесткости k. Определите период малых вертикальных колебаний грузика, если в положении равновесия пружинки образуют правильный треугольник.

**Решение**

Пусть система находится в положении равновесия. В этом положении пружины имеют начальное растяжение по действием силы тяжести груза. Однако, как и в предыдущей задаче, мы можем принять потенциальную энергию системы в этом положении равной нулю и в дальнейшем решении силу тяжести, действующую на груз не учитывать.

Отклоним систему от положения равновесия, опустив груз на малую величину х. В результате каждая из пружин растянется на величину х1 и у пружин появится потенциальная энергия $W\_{пот}=kx\_{1}^{2}$.

х

х1

30°

Связь между величинами х и х1 видна из рисунка (пружинки для простоты обозначены линиями). Так как величина х очень мала, то угол между пружинами практически не изменился и остался равен 60°. Значит удлинение каждой пружины $x\_{1}=x\cos(30°)={x\sqrt{3}}/{2}$. То есть при отклонении груза вниз на величину х пружины приобретут потенциальную энергию

$$W\_{пот}=\frac{3}{4}kx^{2}$$

Возвращаясь в положение равновесия груз приобретет некоторую скорость v и его кинетическая энергия будет равна

$$W\_{кин}=\frac{1}{2}mv^{2}$$

Приравняем кинетическую и потенциальную энергии и заметим, что максимальное отклонение от положения равновесия х и максимальная скорость v связаны соотношением: $v=ω\_{0}x=\frac{2πx}{T}$. Отсюда сразу получаем выражение для периода колебаний:

$$T=2π\sqrt{\frac{2m}{3k}}$$

В заключение заметим, что рассмотренные методы связаны друг с другом, а именно, из одного следует другой.

Запишем закон сохранения энергии как мы его уже записывали через коэффициенты А и В, определяемые инерционными и упругими свойствами системы:

$$Av^{2}=Bx^{2}$$

Продифференцируем это выражение по времени:

$$2Avv'\left(t\right)=2Bxx'(t)$$

Но $v'\left(t\right)=a$ - ускорение, а $x'\left(t\right)=v$ - скорость. Получаем:

$$Aa=Bx ⟹ a=\frac{B}{A}x$$

Таким образом, мы получаем прямо пропорциональную зависимость ускорения от величины отклонения.