Управление образования

Администрации Сергиево-Посадского района

Муниципальное общеобразовательное учреждение

«Физико-математический лицей»

**Консультация для учителей**

**по теме «Логарифмические уравнения и неравенства с параметром»**

Учитель: Николаев Н.В.

 Учитель: Чумичева Л.В.

2016-2017 учебный год

# Логарифмические уравнения и неравенства с параметром

**Задачи с параметрами практически не представлены в школьном курсе математики. Между тем они включены в государственную итоговую аттестацию в 11 классе. Для решения задач с параметрами не требуется обладать знаниями, выходящими за рамки школьной программы. Однако непривычность формулировки обычно ставит в тупик учащихся, не имеющих опыта решения подобных задач.**

**Параметр, присутствующий в условии задач, не создаёт слишком больших трудностей, но в то же время позволяет сформировать у учащихся отчетливое представление о параметрических задачах и основных принципах их решения.**

**В работу включены: необходимый теоретический материал, примеры с решениями, упражнения для самостоятельной работы с ответами.**

**Пример 1:** Определить при каких значениях параметра*а* уравнение $log\_{3}(x-3)=log\_{9}(3+ax)$ не имеет решений.

*Решение:* ОДЗ: $\left\{\begin{array}{c}x-3>0\\3+ax>0\end{array}\right.$

$log\_{3}(x-3)=log\_{9}(3+ax)$⟺$2log\_{9}\left(x-3\right)=log\_{9}\left(3+ax\right)⟺$

$$\left\{\begin{array}{c}log\_{9}\left(x-3\right)^{2}=log\_{9}(3+ax)\\x-3>0\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}\left(x-3\right)^{2}=3+ax\\x-3>0\end{array}\right.⟺\left\{\begin{array}{c}x^{2}-\left(6+a\right)x+6=0\\x>0\end{array}\right.$$

Решений нет при: 1) *D< 0* 2) $\left\{\begin{array}{c}D\geq 0\\x\_{1}\leq x\_{2}\leq 3\end{array}\right.$

1. *D* = $(6+a)^{2}-4\*6=36+12a-24+a^{2}=12+12a+a^{2}$

$$a^{2}+12+12a<0$$

*D* = 36-12=24

$$x\_{1,2}=-6\pm \sqrt{24}=-6\pm 2\sqrt{6}$$

1. *D ≥ 0*

*y(x)* = $x^{2}-\left(6+a\right)x+6,$*y′(x) = 2x-6-a;y′′(3) = - a*

*y(3)* = *9 – 18 - 3a + 6 = - 3a – 3.*

$\left\{\begin{array}{c}D<0 \\D\geq 0\\\frac{-y^{'}\left(3\right)}{1}\leq 0\\\frac{y\left(3\right)}{1}\geq 0\end{array}\right.⟺$*aЄ (- 6 - 2*$\sqrt{6}$*; - 6 + 2)*

$$\left\{\begin{array}{c}aЄ\left(-\infty ;-6-2\sqrt{6}\right]U [-6+2\sqrt{x};+\infty )\\a\leq -1\end{array}\right.$$

$-6+2\sqrt{6}<-1-п$ервоначально верно

$2\sqrt{6}<5$*; 24 < 25 – верно*

*Ответ: (-∞; 1].*

**Пример 2:** Уравнение $log\_{2}xlog\_{2}4x=log\_{2}axlog\_{2}4ax$ имеет только два корня. При каких значениях параметра а это возможно?

*Решение: D(y):*$\left\{\begin{array}{c}x>0\\a>0\end{array}\right.;$

$log\_{2}xlog\_{2}4x=log\_{2}axlog\_{2}4ax$;

$$log\_{2}x\left(2+log\_{2}x\right)=\left(log\_{2}a+log\_{2}x\right)\left(log\_{2}a+2+log\_{2}x\right).$$

Пусть $log\_{2}x=t.$

$log\_{2}a=k$;

$$t\left(2+t\right)-\left(k+t\right)\left(k+2+t\right)=0;$$

$$2t+t^{2}-k^{2}-2k-kt-tk-2t-t^{2}=0;$$

$$k^{2}+2k+2kt=0;$$

$$k\*\left(k+2+2t\right)=0;$$

1. *k ≠ 0* – существует один корень $t=\frac{2-k}{2};$
2. *k = 0* –бесконечное множество решений, т. е. *а = 1.*

*Ответ:* такого значения параметра а нет, чтобы уравнение$log\_{2}xlog\_{2}4x=log\_{2}axlog\_{2}4ax$ имело только два решения.

**Пример 3:** При каких значениях параметра *k* уравнение $log\_{2}(4^{x}-12)=k+x$ разрешимо?

*Решение:*$log\_{2}(4^{x}-12)=k+x;$

$$log\_{2}\left(4^{x}-12\right)=log\_{2}2^{k+x};$$

$$4^{x}-12=2^{k+x}.$$

Пусть $2^{x}=t.$

$$t^{2}-2^{k}\*t-12=0;$$

$$D=(2k)^{2}+4\*12>0 ∀k;$$

$t\_{1,2}=\frac{2^{k}\pm 2\sqrt{2^{k}+12}}{2} .$

Так как $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=-p\\x\_{1}\*x\_{2}=q\end{array}\right. , то\left\{\begin{array}{c}q=-12<0\\-p=2^{k}>0\end{array}.\right.$

Значит, больший корень положителен.

Но $t>2\sqrt{3}$, чтобы существовал

$log\_{2}(t^{2}-12)$($t>2\sqrt{3}$- условие существования логарифма).

*f*($2\sqrt{3})<0,$ тогда $t\_{1}>2\sqrt{3};$ (f(t) = $t^{2}-2^{k}t-12$

$$\left(2\sqrt{3}\right)^{2}-2^{k}2\sqrt{3}-12<0;$$

$$12-2^{k}2\sqrt{3}-12<0;$$

$-2^{k}\*2\sqrt{3}<0$для $∀k.$

*Ответ:*при$∀k$ существует единственный корень уравнения $log\_{2}(4^{x}-12)=k+x$,т. е. уравнение разрешимо.

**Пример 4:** При каких значениях параметра*а* неравенство

$log\_{a}\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}+log\_{a}\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|}>1$ справедливо для любых *х*?

*Решение:* Так как $\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}>0 и\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|}>0 при∀x, то$

$log\_{a}\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}+log\_{a}\frac{6+5\left|x\right|}{1+x}=log\_{a}(\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}\*\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|})$,

тогда $log\_{a}(\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}\*\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|})>log\_{a}a$.

а) Пусть*а > 1*, тогда, учитывая,

что *y =*$log\_{a}x$ – возрастающая, $\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}\*\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|}>a.$

Выделим целую часть для каждой дроби и получим

$$\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}=3+\frac{1}{1+\left|x\right|}; \frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|}=5+\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|}.$$

Положим$\frac{1}{1+\left|x\right|}=t, тогда\left(5+t\right)\left(3+t\right)>a; t^{2}+8t+15-a>0.$

Так как $t>0, $то это возможно для любых $t>0$, если

$15-a>0;$ т. е. при $a<15,$

учитывая условия возрастания, $1<a<15.$

б) $0<a<1,$ тогда $t^{2}+8t+15-a<0,$ что возможно не для всех положительных *t*, даже если *D>0*. По условию этот случай не подходит.



*Ответ:* неравенство $log\_{a}\frac{4+3\left|x\right|}{1+\left|x\right|}+log\_{a}\frac{6+5\left|x\right|}{1+\left|x\right|}>1$ справедливо для любых *х* при $1<a<15.$

**Пример 5:** Найдите все значения параметра *а*, при которых число *х = 14* является решением неравенства

$\left(x-14\right)(x-26)\sqrt{a^{2}-24alog\_{13}\left(x-13\right)-25}\geq 0,$ а число

*х = 26* не является решением этого неравенства.

*Решение:* Неравенство равносильно

$$\left\{\begin{array}{c}a^{2}-24alog\_{13}\left(x-13\right)-25\geq 0\\\left(x-14\right)(x-26)(a^{2}-24alog\_{13}\left(x-13\right)-25)^{2}\geq 0\end{array}\right.$$

Пусть *f(x)* = $a^{2}-24alog\_{13}\left(x-13\right)-25;$

$\left\{\begin{array}{c}f(14)\geq 0\\f\left(26\right)<0\end{array}\right. ; \left\{\begin{array}{c}a^{2}-24a\*0-25\geq 0\\a^{2}-24alog\_{13}13-25)<0\end{array};\right.\left\{\begin{array}{c}a^{2}-25\geq 0\\a^{2}-24a-25<0\end{array}\right.;$

*Ответ:* при *а Є [5; 25)* число *х = 14* является решением неравенства

$\left(x-14\right)(x-26)\sqrt{a^{2}-24alog\_{13}\left(x-13\right)-25}\geq 0$ , а число

*х = 26* не является решением этого неравенства.

**Пример 6:** При каких значениях параметра *а* неравенство

$log\_{\frac{2a-15}{5}}\frac{\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)+a-5)}{5}>0$ справедливо для любых *х* из области определения *D(H)?*

*Решение:*

а) Если $\frac{2a-15}{5}>1,$ то $y=log\_{\frac{2a-15}{5}}x$ - возрастающая, тогда $\frac{\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)+a-5)}{5}>1.$

$\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)>10-a)$ , но

$$\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)=2(\frac{1}{2})\*\sin(x+\frac{\sqrt{3}}{2})\cos(x) =2(\cos(\frac{π}{3}))\sin(x+\sin(\frac{π}{3}\cos(x))=2\sin(\left(x+\frac{π}{3}\right).)))$$

Тогда $\sin(\left(x+\frac{π}{3}\right)>\frac{10-a}{2}, )$ и если неравенство должно быть справедливо всегда, то это возможно только при $-1>\frac{10-a}{2}$;

т. е. $a\geq 12.$

б) Если $0<\frac{2a-15}{5}<1$, то 7,5 <a< 10, тогда

$y=log\_{\frac{2a-15}{5}}x$ - убывающая и неравенство равносильно

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)+a-5)}{5}>0\\\frac{\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)+a-5)}{5}<1\end{array}.\right.$$

Тогда $\left\{\begin{array}{c}\sin(\left(x+\frac{π}{3}\right)>\frac{5-a}{2})\\\sin(\left(x+\frac{π}{3}\right)<\frac{10-a}{2})\end{array}\right., т.е. \frac{5-a}{2}<\sin(\begin{array}{c}\left(x+\frac{π}{3}\right)<\frac{10-a}{2}.\\\end{array})$

Чтобы это выполнялось, необходимо чтобы

$$\left\{\begin{array}{c}1\leq \frac{10-a}{2}\\-1\geq \frac{5-a}{2}\end{array}\right.; \left\{\begin{array}{c}a\leq 8\\a\geq 7\end{array}; 7\leq a\leq 8.\right.$$

Учитывая условие убывания, получим $ 7,5<a\leq 8.$

*Ответ:* неравенство $log\_{\frac{2a-15}{5}}\frac{\sin(x+\sqrt{3}\cos(x)+a-5)}{5}>0$ справедливо для любых *х Є D(H)*при*а ≥ 152* или $7,5<a\leq 8$.

*Самостоятельная работа:*

1. Найдите все значения параметра *а*, при которых уравнение

$4log\_{7}\sin(x+alog\_{7}\sin(x-a^{2}+4a+5=0))$ имеет хотя бы одно решение.

1. Найдите все значения параметра *а*, при которых только одно из чисел

$x=5 или x=7$ является решением неравенства.

1. При каких значениях параметра*а* неравенство

$log\_{a}\left(\sqrt{1-x^{2}}+1\right)+log\_{a}\left(\sqrt{1-x^{2}}+7\right)<1$ справедливо для любых $x Є D\left(H\right)?$

***Ответы:***

1. *Ответ:* при $a Є \left(-\infty ;-4\right)U[-1;5]$ уравнение имеет хотя бы один корень.
2. *Ответ:* при $a Є [2;5]$ только $x=6- $решение неравенства.
3. Ответ: при $0<a<1$ неравенство справедливо для любых $x Є \left[-1;1\right].$