Управление образования

Администрации Сергиево-Посадского муниципального района

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Физико-математический лицей»

**Консультация для учителей по теме**

**«Иррациональные уравнения с параметром. Задачи ЕГЭ»**

Учитель математики

Николаев Н.В.

2017-2018 учебный год

Задачи с параметрами – неотъемлемая часть ЕГЭ по математике. Решение задачи с параметром, как правило, предполагает небольшое исследование. Задачи с параметром очень разнообразны. Общих методов их решения не существует (кроме линейных уравнений, неравенств и систем с параметрами; квадратных уравнений и задач, связанных с расположением корней квадратного трехчлена, относительно заданных чисел). Единственное, что объединяет задачи с параметром – это то, что почти любую из них можно отнести к одной из следующих групп:

* задачи, в которых требуется найти все значения параметра, при каждом из которых выполняется некоторое условие (уравнение имеет корни, принадлежащие данному промежутку; неравенство имеет решение и т.д.);
* задачи, в которых требуется решить уравнение (неравенство или систему) с параметрами.

Причем, во второй группе требуется установить, при каких значениях параметра задача имеет решения и указать их. Решение большинства таких задач связано со свойствами функций, входящих в условие задачи.

Представим решение восьми задач с параметрами. Осуществлять решение задач будем по схеме:

 анализ вида задания и поиск плана решения → решение → анализ решения.

При выполнении решения избранных заданий будем использовать следующие условные обозначения:

ООУ – область определения уравнения;

ООН – область определения неравенства;

ООС – область определения системы уравнений или неравенств;

л.ч. – левая часть уравнения (или неравенства);

п.ч. – правая часть уравнения (или неравенства).

**Иррациональные уравнения с параметрами.**

Пример. Решить уравнение , (а – параметр).

Решение: Перепишем уравнение в виде:  и рассмотрим его как квадратное относительно . Находим D = 4а-3. Уравнение имеет решение, если*а*≥3/4. Имеем: 

Видим, что первое уравнение совокупности имеет решение тогда и только тогда, когда 1-, т.е. при*а*≤1. Решим оба уравнения совокупности, получим 3/4≤*а*≤1:

, Таким образом приходим к ответу: при 3/4≤*а*≤1 уравнение имеет два корня ,; при *а*>1 уравнение имеет один корень: ; при *а*< решений нет.

 Решая иррациональные уравнения с параметром, удобно использовать графический метод решения, особенно, если в задаче ставится вопрос *не решить уравнение*, а *указать количество возможных решений*.

**Задача 1.** При каких*а* уравнение  не имеет решений?

Переформулируем задачу: «При каких*а* график функции  не имеет с графиком функции  ни одной точки пересечения?» Функция задает семейство всех прямых, параллельных биссектрисе нечетных координатных углов, а функция, равносильная системе - верхние полуветви равнобокой гиперболы. Построив эти графики (рис), мы увидим, что график функции не пересекает прямые с параметром .

**1**

**1**

**0**

**х**

**у**

**Задача 2.** При каких*а* уравнение  имеет не более одного решения?

Рассмотрим функцию  и семейство функций, которое равносильно . Его график – семейство парабол. Далее, т.е. эта функция задает верхнюю полуокружность радиуса 2 с центром в точке (1;0).

Полуокружность и парабола будут иметь одну общую точку (см. рис), если *а* = 2 (касание параболы и полуокружности), и не будут иметь общих точек, если *а* > 2 или *а*<*а0 (а0* – значение *а*, при котором парабола проходит через концы полуокружности, *а0* = -20). Следовательно, данное уравнение *будет иметь не более одного решения*при, причем при *а* = 2 будет ровно одно решение, а при *решений не будет*.

**Задача 3**. Найти все значения параметра *а*, при которых уравнение



имеет более трех различных корней.

I. Анализ задания и поиск плана решения.

* особенностью данного уравнения является то, что оно в неявном виде содержит одинаковые операции над выражениями  и .
* план решения может быть таким:

1) записать данное уравнение в виде ;

2) убедиться, что - монотонная функция;

3) осуществить переход к уравнению  и решить его.

II. Решение.

1) Используя свойства модуля (, степени ( и внесение множителя под знак корня (), заменим исходное уравнение равносильным: 

2) Получим функцию , имеющую смысл при  и возрастающую при  (как сумма двух возрастающих функций). Исходное уравнение, в этом случае, стало вида:

, где , 

3) Воспользуемся **теоремой**:

Если функция  монотонна на промежутке J, то уравнение равносильно на промежутке J уравнению .

Получили уравнение , или  ……………….(\*),

равносильное данному.

Так как требуется найти все значения *а*, при которых данное уравнение, а значит и равносильное ему уравнение (\*), должно иметь более трех различных корней, то для этого необходимо и достаточно, чтобы уравнение (\*) имело 2 различных корня. Это будет выполняться при условии



III. Анализ результата

Следует взять на заметку теорему о переходе от уравнения  к уравнению .

**Задача 4.**Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение  имеет хотя бы один корень.

**Решение.**

Рассмотрим две функции:

 и Поскольку  получаем: 

Функция  является кусочно-линейной, причём при  угловой коэффициент равен либо 3, либо 9, а при  угловой коэффициент равен либо –3, либо –9. Значит, функция  возрастает при  и убывает при  поэтому 

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда 



Значит, либо

 откуда 

либо

 откуда 

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при  и при  и не имеет корней при других значениях 

Ответ: 

**Задача 5.**Найдите все значения *a,* при которых любое решение уравнения



принадлежит отрезку 

**Решение.**

Рассмотрим функцию  Она определена при  возрастает на области определения и принимает все значения от  до  Значит, уравнение  имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку  тогда и только тогда, когда  и  Получаем систему неравенств:



Ответ: 

**Задача 6.**Найдите все такие значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение  имеет хотя бы одно решение.

**Решение.**

Решение 1. Положим  где  так как 

Тогда, исходное уравнение принимает вид  Найдем множество значений функции  на отрезке [0; 2]. Так как  на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, следовательно, множество ее значений на отрезке [0; 2] ― отрезок [f (2); f (0)], т.е. отрезок  Таким образом, уравнение  имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются условия 



Решение 2. Положим  где  так как  и рассмотрим функцию  Так как ее производная  на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, значит, имеет на нем не более одного корня. Этот корень есть тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия  и  Таким образом, приходим к системе



Решение 3 (Указание). Построить эскиз графика функции  на отрезке [0; 2] (см. решение 1) и исследовать взаимное расположение графика этой функции и прямой 

Ответ:  

**Задача 7.**Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение



имеет хотя бы один корень.

**Решение.**

Произведём замену переменной  получим:



Пусть теперь





При *t* ≥ 0 функция *g*(*t*) убывает, принимая все значения от  до  При *t* < 0 функция *g*(*t*) − возрастает, принимая все значения от  до  Значит, 

Функция *f*(*t*) принимает минимальное значение при  причём на промежутке (0; +∞) — функция возрастает, принимая все значения от  до , а на промежутке (−∞; 0) — убывает (функция чётная), принимая все значения от  до 

Поскольку наибольшее значение функции  и наименьшее значение функции  достигается при одном и том же значении , уравнение будет иметь решение тогда и только тогда, когда  то есть



1) При *a* ≥ 0 получаем



2) При *a* < 0 получаем



Ответ: 

**Задача 8.**Найдите все значения *a*, при каждом из которых система уравнений



имеет ровно два различных решения.

**Решение.**

Запишем первое уравнение системы в виде



При  левая часть не имеет смысла. При  уравнение задаёт прямую  и гиперболу  (см. рис.).



При каждом значении *a* уравнение  задаёт прямую с угловым коэффициентом *a*, проходящую через начало координат.

При  такая прямая пересекает прямую  при  и  пересекает правую ветвь гиперболы  при  пересекает левую ветвь гиперболы  при  При этом прямая  проходит через точку пересечения прямой  и гиперболы  при 

Число решений исходной системы равно числу точек пересечения прямой  и гиперболы  с прямой  при условии 

Таким образом, исходная система имеет ровно два решения при  и при 

Ответ: 