УПРАВЛЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ АДМИНИСТРАЦИИ
СЕРГИЕВО-ПОСАДСКОГО МУНИЦИПАЛЬНОГО РАЙОНА

**МУНИЦИПАЛЬНОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**«ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ»**

141300, Московская обл., г. Сергиев Посад, ул. К. Маркса, д.3. Тел.\ факс: (496) 540-45-48

E-mail: sp1000@yandex.ru http://ФМЛ.РФ

Лицензия Министерства образования Московской обл.: 50 Л 01 № 0008037 от 10.08.2016 (регистрационный № 76157)

**Решение неравенств с модулем**

КОНСУЛЬТАЦИЯ

для учителей района

 **Учитель: Гавриленко Г.Ю.**

2016 - 2017 учебный год

В средней общеобразовательной школе тема «Решение уравнений и неравенств с модулем» не выделена отдельно. Поэтому на протяжении всего школьного курса математики надо отводить уроки для последовательного рассмотрения основных способов решений таких уравнений и неравенств. Тогда в 10 – 11 классах освободиться время для нестандартных методов решений многих задач, содержащих модуль.

Задания с модулем стали одной из составляющих вариантов итоговой аттестации в 9 и 11 классах. Подобные задания встречаются во второй части и имеют достаточно высокий уровень сложности. Часто успех состоит из того, насколько можно упростить их решение. При решении заданий с модулем необходимо не только владеть стандартными методами решения уравнений и неравенств на высоком уровне, но и уметь делать логические заключения, внимательность и аккуратность.

Чаще всего школьники решают задания с модулем «раскрывая» их. Это длительная и трудоемкая работа, требующая внимания и больших затрат времени. Она утомляет и учащиеся отказываются от решений таких заданий. Методы решения, основанные на равносильных преобразованиях, облегчают работу и громоздкие задания упрощаются. Работать с равносильными преобразованиями необходимо начинать уже с 8 класса, когда дети знакомятся с заданиями, содержащими модуль.

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ БЛОК**

**Определение модуля даётся в 6 классе.**

Здесь можно рассмотреть простейшие неравенства с модулем на основании алгебраической и геометрической интерпретации.

1. Зная алгебраическое определение: модуль числа а – это либо само число, если а число неотрицательное, либо число – а, противоположное числу а, если а число отрицательное. На основании этих знаний можно рассмотреть основные свойства модуля и отработать решения следующих неравенств:

$$\left|a\right|\geq 0 \leftrightarrow aϵR$$

$$\left|a\right|\leq 0 \leftrightarrow a=0$$

$$\left|a\right|>0 \leftrightarrow aϵR,a\ne 0$$

$$\left|a\right|<0 \leftrightarrow a ϵ ∅$$

1. Затем рассматривается геометрическая интерпретация: модуль числа а – это расстояние от начала отсчета на координатной прямой до точки, соответствующей числу а.

 - a 0 a x

Теперь отрабатывается решение следующих неравенств:

$$\left|a\right|\geq 5 \leftrightarrow a ϵ \left(-\infty ;\left.-5\right]∪\left[5; +\infty )\right.\right.$$

$$\left|a\right|\leq 5 \leftrightarrow a ϵ \left[-5;5\right]$$

$$\left|a\right|>-5 \leftrightarrow a ϵ R$$

$$\left|a\right|<-5 \leftrightarrow a ϵ ∅$$

Материал хорошо запоминается в игровой форме. Можно предложить математическое домино. Этот вид деятельности не только позволит отработать основные свойства модуля, но также развить метапредметные компетенции учащихся через историческую справку о возникновении этого понятия.

Если домино собрано верно, то у учащихся должен получится код C1 O8 T4 E1 S.

Считают, что термин модуль предложил использовать Роджер [Котс](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D1%82%D1%81%2C_%D0%A0%D0%BE%D0%B4%D0%B6%D0%B5%D1%80) (Roger Cotes; [10 июля](https://ru.wikipedia.org/wiki/10_%D0%B8%D1%8E%D0%BB%D1%8F) [1682](https://ru.wikipedia.org/wiki/1682) — [5 июня](https://ru.wikipedia.org/wiki/5_%D0%B8%D1%8E%D0%BD%D1%8F) [1716](https://ru.wikipedia.org/wiki/1716))– английский математик и философ, ученик [Ньютона](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9D%D1%8C%D1%8E%D1%82%D0%BE%D0%BD%2C_%D0%98%D1%81%D0%B0%D0%B0%D0%BA). [Лейбниц](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9B%D0%B5%D0%B9%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D1%86%2C_%D0%93%D0%BE%D1%82%D1%84%D1%80%D0%B8%D0%B4_%D0%92%D0%B8%D0%BB%D1%8C%D0%B3%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D0%BC) тоже использовал эту функцию, которую называл модулем и обозначал: mol x. Общепринятое обозначение абсолютной величины введено в 1841 году немецким математиком Вильгельмом [Вейерштрассом](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D0%B5%D0%B9%D0%B5%D1%80%D1%88%D1%82%D1%80%D0%B0%D1%81%D1%81%2C_%D0%9A%D0%B0%D1%80%D0%BB).

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **УДАЧИ!** | $$\left|a\right|\geq -6$$ |
| C1 | $$aϵR$$ | $$\left|a\right|\leq 0$$ |
| O8 | $$a=0$$ | $$\left|a\right|<-2$$ |
| T4 | $$aϵ∅$$ | $$\left|a\right|>0$$ |
| E1 | $$aϵR,a\ne 0$$ | $$\left|a\right|\geq 1$$ |
| S | $$aϵ\left(-\infty ;\left.-1\right]∪\left[1; +\infty )\right.\right.$$ | $$\left|a\right|\leq 1$$ |
|  | $$aϵ\left[-1;1\right]$$ | ***МОЛОДЦЫ!*** |

**В 8 классе после изучения темы «Неравенства», следует отработать решение простейших неравенств с модулем.**

$$\left|a\right|\geq a \leftrightarrow a ϵ R$$

$$\left|a\right|>a \leftrightarrow a<0$$

$$\left|a\right|\leq a \leftrightarrow a\geq 0$$

$$\left|a\right|<a \leftrightarrow a ϵ ∅$$

Математическое лото помогает разнообразить деятельность учащихся на уроке и закреплению материала. Если лото собрано верно, то на обратной стороне должно получиться высказывание «Легкость математики основана на возможности чисто логического ее построения, трудность, отпугивающая многих, — на невозможности иного изложения.» (Хуго Штейнгаус 1887-1972 польский математик и педагог)

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left|a-2\right|\geq a-2$$ | $$\left|a-2\right|\leq 0$$ |
| $$\left|a-2\right|>a-2$$ | $$\left|a-2\right|\leq a-2$$ |
| $$\left|a-2\right|>0$$ | $$\left|a-2\right|<a-2$$ |
| $$\left|a^{2}-4\right|+\left|a+2\right|>0$$ | $$\left|a^{2}-4\right|+\left|a+2\right|\leq 0$$ |

|  |  |
| --- | --- |
| $$a ϵ R$$ | $$a=2$$ |
| $$a<2$$ | $$a\geq 2$$ |
| $$a ϵ R, a\ne 2$$ | $$a ϵ ∅$$ |
| $$a ϵ R, a\ne - 2$$ | $$a=-2$$ |

|  |  |
| --- | --- |
| **Легкость математики** | **основана на возможности** |
| **чисто логического** | **ее построения,** |
| **трудность,**  | **отпугивающая многих,** |
| **— на невозможности** | **иного изложения** |

**Рассмотреть несколько способов решения неравенств.**

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left|х-x\_{0}\right|<a$$ | $$\left|x-x\_{0}\right|\geq a$$ |
| 1. **Использование геометрического определения модуля**
 |
| Выражение $\left|х-x\_{0}\right|<a$ означает, что расстояние от точки х до точки $x\_{0}$ меньше a единиц. Отмечаем на оси х число $x\_{0}$ и отсчитываем от него в обе стороны a единичных деления. Получаем числа $x\_{0}+a$ и $x\_{0}-a$. Решением данного неравенства будет промежуток между этими значениями.Пример:$$\left|х-3\right|<4$$http://raal100.narod.ru/olderfiles/3/Modul_neravenstva.pngОтвет: x$ϵ(-1;7)$ | С геометрической точки зрения решением неравенства являются все числа, которые отстоят от $x\_{0}$на расстоянии не менее $a$ единиц. На числовой прямой видно, что это все числа не больше $x\_{0}$-$ a$ или не меньше $x\_{0}+a$.Пример:$$\left|x-2\right|\geq 5$$http://raal100.narod.ru/olderfiles/3/Modul_neravenstva.pngОтвет: x$ϵ(-\infty ; -\left.3\right]∪\left[7; +\infty )\right.$ |
| 1. **Использование алгебраического определения модуля.**
 |
| $$\left|f(x)\right|<a\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)\geq 0\\f\left(x\right)<a\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}f(x)<0\\- f\left(x\right)<a \end{array}\right.\end{array}\right.$$ | $$\left|f(x)\right|>a\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}f\left(x\right)\geq 0\\f\left(x\right)>a\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}f(x)<0\\- f\left(x\right)>a \end{array}\right.\end{array}\right.$$ |
| $$\left|х-3\right|<4 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\x-3<4\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x<3\\- x+3<4\end{array}\right.\end{array}\right.$$$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\x<7\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x<3\\x> -1\end{array}\right.\end{array}\leftrightarrow -1<x<7\right.$$Ответ: x$ϵ(-1;7)$ | $$\left|x-2\right|\geq 5 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\geq 2\\x-2\geq 5\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x<2\\- x+2\geq 5\end{array}\right.\end{array}\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x\geq 7\\x\leq -3\end{array}\right.\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; -\left.3\right]∪\left[7; +\infty )\right.$ |
| $$2\left|x\right|-4,5\leq \frac{40-3\left|x\right|}{8}\leftrightarrow $$$$16\left|x\right|-36\leq 40-3\left|x\right|\leftrightarrow $$$$19\left|x\right|\leq 76\leftrightarrow $$$$\left|x\right|\leq 4\leftrightarrow $$$$- 4\leq x\leq 4$$Ответ: x$ ϵ (-4;4)$ | $$\left|x-1\right|+\left|x-2\right|>x+3\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<1\\1-x+2-x>x+3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}1\leq x<2\\x-1+2-x>x+3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 2\\x-1+x-2>x+3\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<1\\3x<0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}1\leq x<2\\x<-2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 2\\x>6\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x<0\\x>6\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ\left(-\infty ; 0\right)∪(6;+\infty )$ |
| $$\frac{\left|2-x\right|-x}{\left|x-3\right|-1} \leq 2 \leftrightarrow \frac{\left|x-2\right|-x}{\left|x-3\right|-1} \leq 2\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<2\\\frac{2-x-x}{3-x-1} \leq 2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}2\leq x<3\\\frac{x-2-x}{3-x-1} \leq 2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\\frac{x-2-x}{x-3-1} \leq 2\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<2\\\frac{2-2x}{2-x} \leq 2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}2\leq x<3\\\frac{-2}{2-x} \leq 2\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\\frac{-2}{x-4} \leq 2\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<2\\\frac{-2}{2-x} \leq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}2\leq x<3\\\frac{-6+2x}{2-x} \leq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\\frac{-2x+6}{x-4} \leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<2\\\frac{2}{x-2} \leq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}2\leq x<3\\\frac{2x-6}{x-2} \geq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\\frac{2x-6}{x-4} \geq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x<2\\x>4\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ\left(-\infty ; 2\right)∪(4;+\infty )$ | $$\left|2x-\left|x-2\right|\right|\leq 3\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}2x-\left|x-2\right|\leq 3\\2x-\left|x-2\right|\geq -3\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}\left|x-2\right|\geq 2x-3\\\left|x-2\right|\leq 2x+3\end{array}\right.\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x-2\geq 2x-3\\x-2\leq -2x+3\end{array}\right.\\x-2\leq 2x+3\\x-2\geq -2x-3\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x\leq 1\\x\leq \frac{5}{3}\end{array}\right.\\x\geq -5\\x\geq - \frac{1}{3}\end{array}\right.\leftrightarrow - \frac{1}{3}\leq x\leq \frac{5}{3}$$Ответ: x$ ϵ \left[-\frac{1}{3};1\frac{2}{3}\right]$ |
| 1. **Использование блок – схемы решения неравенств с модулем**
 |
| 1. $\left|f(x)\right|<a\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}f(x)<a\\f\left(x\right)>-a\end{array}\right.$
 | $$\left|f(x)\right|>a\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>a\\f\left(x\right)<-a\end{array}\right.$$ |
| $$\left|х-3\right|<4 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x-3<4\\x-3>-4\end{array}\right.\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x<7\\x> -1\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ(-1;7)$ | $$\left|x-2\right|\geq 5 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x-2\geq 5\\x-2\leq -5\end{array}\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x\geq 7\\x\leq -3\end{array}\right.\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; -\left.3\right]∪\left[7; +\infty )\right.$ |
| 1. $\left|f(x)\right|<g(x)\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}f(x)<g(x)\\f\left(x\right)>-g(x)\end{array}\right.$
 | $$\left|f(x)\right|>g(x)\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>g(x)\\f\left(x\right)<- g(x)\end{array}\right.$$ |
| $$\left|2x-5\right|<x\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}2x-5<x\\2x-5>-x\end{array}\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x<5\\x>1\frac{2}{3}\end{array}\right.\right.$$Ответ: x$ϵ(-1\frac{2}{3};5)$ | $$\left|3x-2\right|>2x+1\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}3x-2>2x+1\\3x-2<-2x-1\end{array}\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x>3\\x<0,2\end{array}\right.\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; -0,2)∪(3;+\infty )$ |
| $$\left|3 x-7\right|-\left|3-x\right|\leq 6\leftrightarrow $$$$\left|3 x-7\right|\leq \left|x-3\right|+6\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}3x-7\leq \left|x-3\right|+6\\3x-7\geq -\left|x-3\right|-6\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}\left|x-3\right|\geq 3x-13\\\left|x-3\right|\geq 1-3x\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x-3\geq 3x-13\\x-3\leq 13-3x\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}x-3\geq 1-3x\\x-3\leq 3x-1\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x\leq 5\\x\leq 4\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{c}x\geq 1\\x\geq -1\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow -1\leq x\leq 5$$Ответ: x$ ϵ \left[-1;5\right]$ | $$\left| x+3\right|+\left|x-2\right|\geq 7\leftrightarrow $$$$\left| x+3\right|\geq 7-\left|x-2\right|\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x+3\geq 7-\left|x-2\right|\\x+3\leq \left|x-2\right|-7\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\left|x-2\right|\geq 4-x\\\left|x-2\right|\geq x+10\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x-2\geq 4-x\\x-2\leq x-4\\x-2\geq x+10\\x-2\leq -x-10\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\geq 3\\x\leq -4\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; -\left.4\right]∪\left[3; +\infty )\right.$ |
| 1. $\left|f\left(x\right)\right|<\left|g\left(x\right)\right|\leftrightarrow $

$$(f\left(x\right)-g\left(x\right))(f\left(x\right)+g(x)<0$$ | $$\left|f\left(x\right)\right|>\left|g\left(x\right)\right|\leftrightarrow $$$$(f\left(x\right)-g\left(x\right))(f\left(x\right)+g(x)>0$$ |
| $$\left|x-3\right|<\left|x+2\right|\leftrightarrow $$$$\left(x-3-x-2\right)\left(x-3+x+2\right)<0\leftrightarrow $$$$-5\left(2x-1\right)<0\leftrightarrow $$$$2x-1>0\leftrightarrow x>0,5$$Ответ: $x\in (0,5;+\infty )$ | $$\left|x+3\right|\geq \left|x\right|\leftrightarrow $$$$\left(x+3-x\right)\left(x+3+x\right)\geq 0\leftrightarrow $$$$3\left(2x+3\right)\geq 0\leftrightarrow $$$$2x+3\geq 0\leftrightarrow x\geq -1,5$$Ответ: $x\in \left[- 1,5\right.;+\infty )$ |

При закрепление материала можно использовать следующие неравенства:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$\left|f(x)\right|<a$$1. $\left|2х-3\right|<5$
2. $\left|4x+5\right|\leq 3 $
3. $\left|4-2x\right|<1$
4. $3\left|x+1\right|\leq 2$
5. $5-\left|7-2x\right|<0$
 | $$\left|f(x)\right|>a$$1. $\left|х-2\right|\geq 1$
2. $2\left|х+1\right|>1$
3. $\left|3х-2\right|\geq 4$
4. $\left|3-2х\right|>2$
5. 5$<\left|х+2\right|-4$
 | $$\left|f\left(x\right)\right|<\left|g\left(x\right)\right|$$1. $\left|x-3\right|<\left|x+2\right|$
2. $\left|x+13\right|\leq \left|x+2\right|$
3. $\left|5-x\right|<\left|x-1\right|$
4. 2$\left|x-3\right|<\left|2x+6\right|$
5. $\left|x-3\right|-\left|x+2\right|\leq 0$
 |
| $$\left|f(x)\right|<g(x)$$1. $\left|2х-3\right|<3-2x$
2. $\left|2x-5\right|<x$
3. $\left|2х-3\right|+2x<5$
4. $\left|2х\right|+x<3x-1$
5. $3\left|2х+1\right|-x<4$
 | $$\left|f(x)\right|>g(x)$$1. $\left|х+17\right|\geq x+17$
2. $\left|3-4х\right|>4x-3$
3. $\left|3x-2\right|>2x+1$
4. $2\left|x-1\right|+3>x-5$
5. $\left|5-x\right|+3>9x+1$
 | $$\left|f\left(x\right)\right|>\left|g\left(x\right)\right|$$1. $\left|x-1\right|\geq \left|x-2\right|$
2. $\left|x+1\right|\geq \left|x-3\right|$
3. $\left|3x-1\right|\geq 3\left|x+2\right|$
4. $\left|4-x\right|\geq \left|2-x\right|$
5. $\left|x+11\right|\geq \left|x+12\right|$
 |
| **Через ноль модуля**1. $\left|x-1\right|+\left|x-2\right|>x+3$
2. $\left|x\right|-2\left|x+1\right|+3\left|x+2\right|>4$
3. $3\left|3- x\right|-\left|4+3x\right|<x+3$
4. $\left|x-1\right|-2\left|x+3\right|>x+7$
5. $2\left|x-3\right|+\left|x+1\right|\leq 3x+1$
6. $\frac{\left|4-x\right|-x}{\left|x-6\right|-2} >2 $
7. $\frac{\left|x+3\right|}{\left|x\right|+5x+6} >2 $
8. $\frac{3\left|x\right|+2}{\left|x\right|-1} \leq 3 $
9. $\frac{3\left|х-1\right|}{5}>\frac{6+\left|х\right|}{2}-4$
 |  |

**В 9 классе после изучения темы «Решение неравенств методом интервалов», следует еще раз рассмотреть все способы решения неравенств с абсолютной величиной.**

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left|a\right|(a-2)\geq 0$$ | $$\left|a\right|(a+2)\leq 0$$ |
| $$\frac{\left|a\right|}{a-2}\geq 0$$ | $$\frac{\left|a\right|}{a+2}>0$$ |
| $$\frac{\left|a\right|}{a-2}\leq 0$$ | $$\frac{\left|a\right|}{a+2}\leq 0$$ |
| $$\frac{a+2}{\left|a\right|}\geq 0$$ | $$\frac{a-2}{\left|a\right|}\leq 0$$ |

|  |  |
| --- | --- |
| $$a ϵ \left\{0\right\}∪\left[2;+\infty )\right.$$ | $$a ϵ (-\infty ;\left.-2\right]∪\left\{0\right\}$$ |
| $$a ϵ \left\{0\right\}∪(2;+\infty )$$ | $$a ϵ (-2;0)∪(0;+\infty )$$ |
| $$a ϵ (-\infty ;2)$$ | $$a ϵ (-\infty ;-2)∪\left\{0\right\}$$ |
| $$a ϵ \left[-2;\right.0)∪(0;+\infty )$$ | $$a ϵ (-\infty ;-0)∪(0;\left.2\right]$$ |

|  |  |
| --- | --- |
| **Первое условие,** | **которое надлежит** |
| **выполнять в математике,** | **-это быть точным,** |
| **второе -**  | **быть ясным и,** |
| **насколько можно,** | **простым** |

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, - это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым. (Лазар Карно 1753-1823 французский ученый и инженер).

|  |
| --- |
| 1. **Использование алгебраического определения модуля.**
 |
| $$\frac{x^{2}-\left|2х+3\right|}{x^{2}-\left|x+2\right|}\leq 1 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<-2\\\frac{x^{2}+2x+3}{x^{2}+x+2}\leq 1\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}-2\leq x<-1,5\\\frac{x^{2}+2x+3}{x^{2}-x-2}\leq 1\end{array}\right.\end{array}\\\left\{\begin{array}{c}x\geq -1,5\\\frac{x^{2}-2x-3}{x^{2}-x-2}\leq 1\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$ \left[\begin{array}{c}\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x<-2\\x+1\leq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}-2\leq x<-1,5\\\frac{3x+5}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}\leq 0\end{array}\right.\end{array}\\\left\{\begin{array}{c}x\geq -1,5\\\frac{x+1}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}\leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\begin{array}{c}x<-2\\-2\leq x\leq -\frac{5}{3}\end{array}\\x>2\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ;-\left.\frac{5}{3}\right]∪(2;+\infty )$ | $$\left|x-4\right|\left(x+2\right)\geq 4x$$$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\geq 4\\x^{2}-2x-8\geq 4x\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x<4\\- x^{2}+2x+8\geq 4x\end{array}\right.\end{array}\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x\geq 4\\(x-3-\sqrt{17})(x-3+\sqrt{17)}\geq 0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x<4\\\left(x+4\right)\left(x-2\right)\leq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\geq 3+\sqrt{17}\\-4<x<2\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ\left[-4\right.; \left.2\right]∪\left[3+\sqrt{17}; +\infty )\right.$ |
| 1. **Метод замены.**
 |
| $$\left(x-7\right)^{2}-11\left|x-7\right|+30\leq 0$$$$Пусть \left|x-7\right|=t, t\geq 0, то $$$$t^{2}-11t+30\leq 0 \leftrightarrow $$$$\left(t-5\right)\left(t-6\right)\leq 0\leftrightarrow $$$$5\leq t\leq 6$$$$Тогда 5\leq \left|x-7\right|\leq 6\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}\left|x-7\right|\leq 6\\\left|x-7\right|\geq 5\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}-6\leq x-7\leq 6\\\left[\begin{array}{c}x-7\geq 5\\x-7\leq -5\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}1\leq x\leq 13\\\left[\begin{array}{c}x\geq 12\\x\leq 2\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}1\leq x\leq 2\\12\leq x\leq 13\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ\left[1\right.; \left.2\right]∪\left[12; \left.13\right]\right.$ | $$x^{2}+10x-\frac{5}{\left|x+5\right|}+29>0\leftrightarrow $$$$\left(x+5\right)^{2}-\frac{5}{\left|x+5\right|}+4>0$$$$Пусть \left|x+5\right|=t, t\geq 0, то$$$$t^{2}-\frac{5}{t}+4>0\leftrightarrow \frac{t^{2}+4t-5}{t}>0\leftrightarrow $$$$\frac{\left(t+5\right)\left(t-1\right)}{t}>0\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}-5<t<0\\t>1\end{array}\right.$$$$Учитывая, что t\geq 0 получаем$$$$t>1$$$$То \left|x+5\right|>1\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x+5>1\\x+5<-1\end{array}\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x>-4\\x<-6\end{array}\right.\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; -6)∪(-4;+\infty )$ |
| 1. **Использование блок – схемы решения неравенств с модулем**
 |
| $$ \left|f(x)\right|<a\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}f(x)<a\\f\left(x\right)>-a\end{array}\right.$$ | $$\left|f(x)\right|>a\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>a\\f\left(x\right)<-a\end{array}\right.$$ |
| $$\left|x^{2}-х-3\right|<9 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^{2}-x-3<9\\x^{2}-x-3>-9\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left(x-4\right)\left(x+3\right)<0\leftrightarrow -3<x<4$$Ответ: x$ϵ(-3;4)$ | $$\left|x^{2}+5x\right|\geq 6 \leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x^{2}+5x\geq 6\\x^{2}+5x\leq -6\end{array}\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\left(x+6\right)\left(x-1\right)\geq 0\\\left(x+2\right)\left(x+3\right)\leq 0\end{array}\right.\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\geq 1\\x\leq -6\\-3\leq x\leq -2\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; -\left.6\right]∪\left[-3;-2\right]∪\left[1; +\infty )\right.$ |
| $$\left|f(x)\right|<g(x)\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}f(x)<g(x)\\f\left(x\right)>-g(x)\end{array}\right.$$ | $$\left|f(x)\right|>g(x)\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}f\left(x\right)>g(x)\\f\left(x\right)<- g(x)\end{array}\right.$$ |
| $$\left|x^{2}+2x-3\right|\leq 8+2x-x^{2}\leftrightarrow $$$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+2x-3\leq 8+2x-x^{2}\\x^{2}+2x-3\geq x^{2}-2x-8\end{array}\leftrightarrow \right.$$$$\left\{\begin{array}{c}2x^{2}\leq 5\\4x\geq -5\end{array}\right.\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}-\sqrt{2,5}\leq x\leq \sqrt{2,5}\\x\geq -1,25\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ\left[-1,25;\sqrt{2,5})\right]$ | $$\left|\left|x^{2}-8x+2\right|-x^{2}\right|\geq 2x+2\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}\left|x^{2}-8x+2\right|-x^{2}\geq 2x+2\\\left|x^{2}-8x+2\right|-x^{2}\leq -2x-2\end{array} \right.$$$$\left[\begin{array}{c}\left|x^{2}-8x+2\right|\geq x^{2}+2x+2\\\left|x^{2}-8x+2\right|\leq x^{2}-2x-2\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x^{2}-8x+2\geq x^{2}+2x+2\\x^{2}-8x+2\leq -x^{2}-2x-2\\\left\{\begin{array}{c}x^{2}-8x+2\leq x^{2}-2x-2\\x^{2}-8x+2\geq -x^{2}+2x+2\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\leq 0\\2x^{2}-6x+4\leq 0\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 1,5\\2x^{2}-10x\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\leq 0\\\left(x-1\right)\left(x-2\right)\leq 0\\\left\{\begin{array}{c}x\geq 1,5\\x(x-5)\geq 0\end{array}\right.\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\leq 0\\1\leq x\leq 2\\x\geq 5\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ(-\infty ; 0)∪\left[1;2\right]∪\left[5\right.;+\infty )$ |
| 1. $\left|f\left(x\right)\right|<\left|g\left(x\right)\right|\leftrightarrow $

$$(f\left(x\right)-g\left(x\right))(f\left(x\right)+g\left(x\right))<0$$ | $$\left|f\left(x\right)\right|>\left|g\left(x\right)\right|\leftrightarrow $$$$(f\left(x\right)-g\left(x\right))(f\left(x\right)+g\left(x\right))>0$$ |
| $$\left|2x-1\right|<\left|x+2\right|\leftrightarrow $$$$\left(2x-1-x-2\right)\left(2x-1+x+2\right)<0\leftrightarrow $$$$(x-3)\left(3x+1\right)<0\leftrightarrow $$$$-\frac{1}{3}<x<3$$Ответ: $x\in (-\frac{1}{3};3)$ | $$\left|4x-1\right|\geq \left|2x+3\right|\leftrightarrow $$$$\left(4x-1-2x-3\right)\left(4x-1+2x+3\right)\geq 0\leftrightarrow $$$$\left(2x-4\right)\left(6x+2\right)\geq 0\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}x\geq 2\\x\leq -\frac{1}{3}\end{array}\right.$$Ответ: $x\in (-\infty ;\left.-\frac{1}{3}\right]∪\left[2\right.;+\infty )$ |

**Ввести еще несколько способов решения неравенств**

|  |
| --- |
| Метод рационализации |
| $$\left(\left|f\left(x\right)\right|-\left|g\left(x\right)\right|\right)h\left(x\right)\geq 0\leftrightarrow $$$$(f\left(x\right)-g\left(x\right))(f\left(x\right)+g\left(x\right))h(x)\geq 0$$ |  |
| $$\frac{\left|x-7\right|-\left|x+3\right|}{\left|x+13\right|-\left|x+4\right|}\geq 0\leftrightarrow $$$$\frac{\left(x-7-x-3\right)\left(x-7+x+3\right)}{\left(x+13-x-4\right)\left(x+13+x+4\right)}\geq 0\leftrightarrow $$$$\frac{x-2}{2x+17}\leq 0\leftrightarrow -8,5<x\leq 2$$Ответ: $x\in (-8,5;\left.2\right]$ | $$\frac{3\left|x^{2}-x\right|-\left|x^{2}-1\right|}{\left|x^{2}-\frac{3}{5}\right|-\left|x^{2}-\frac{17}{25}\right|}\leq 0\leftrightarrow $$$$\frac{\left(3x^{2}-3x-x^{2}+1\right)\left(3x^{2}-3x+x^{2}-1\right)}{\left(x^{2}-\frac{3}{5}-x^{2}+\frac{17}{25}\right)\left(x^{2}-\frac{3}{5}+x^{2}-\frac{17}{25}\right)}\leq 0$$$$\frac{\left(2x^{2}-3x+1\right)\left(4x^{2}-3x-1\right)}{2x^{2}-\frac{16}{25}}\leq 0\leftrightarrow $$$$\frac{\left(x-1\right)^{2}\left(x+0,25\right)\left(x-0,5\right)}{\left(x+0,8\right)\left(x-0,8\right)}\leq 0\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}-0,8<x\leq -0,25\\0,5\leq x<0,8\\x=1\end{array}\right.$$Ответ: $x\in (-0,8;\left.-0,25\right]∪\left[0,5\right.;0,8)∪\left\{1\right\}$ |
| Используя свойства модуля |
| $$\left|f\left(x\right)\right|+\left|g\left(x\right)\right|>\left|f\left(x\right)+g\left(x\right)\right|\leftrightarrow $$$$f\left(x\right)∙g\left(x\right)<0$$ | $$\left|f\left(x\right)\right|-\left|g\left(x\right)\right|\geq f\left(x\right)-g\left(x\right)\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\\g\left(x\right)\geq 0\end{array}\right.$$$$\left|f\left(x\right)\right|-\left|g\left(x\right)\right|\geq g\left(x\right)-f\left(x\right)\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}f\left(x\right)\geq g\left(x\right)\\g\left(x\right)\leq 0\end{array}\right.$$ |
| $$\left|x^{2}+3x-4\right|+\left|x^{2}-16\right|>\left|2x^{2}+3x-20\right|\leftrightarrow $$$$\left(x^{2}+3x-4\right)\left(x^{2}-16\right)>0$$$$\left(x+4\right)\left(x-1\right)\left(x-4\right)\left(x+4\right)>0\leftrightarrow $$$$1<x<4$$Ответ: $x\in (1;4)$ | $$\left|x^{2}-4x-5\right|-\left|2x^{2}-8x-42\right|\geq x^{2}-4x-37$$$$\left[\begin{array}{c}2x^{2}-8x-42\leq 0\\x^{2}-4x-5-\left(2x^{2}-8x-42\right)\geq 0\end{array}\right.\leftrightarrow $$$$\left[\begin{array}{c}-3\leq x\leq 7\\2-\sqrt{41}\leq x\leq 2+\sqrt{41}\end{array}\right.$$Ответ: x$ϵ\left[2-\sqrt{41};2+\sqrt{41}\right]$ |

При закрепление материала можно использовать следующие неравенства:

|  |  |
| --- | --- |
| $$\left|f(x)\right|<a$$1. $\left|x^{2}-3x\right|\leq 2$
2. $\left|2-3x^{2}\right|\leq 10$
3. $\left|\frac{x+3}{2x-3}\right|\leq 1$
4. $\left|\frac{3x+1}{x-5}\right|\leq 1$
5. $\left|\frac{x^{2}-3x-1}{x^{2}+x+1}\right|<3$
6. $\left|\frac{x^{2}+5x+6}{x+6}\right|\leq 1$
 | $$\left|f(x)\right|>a$$1. $\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2$
2. $\left|2x^{2}-9x+15\right|\geq 20$
3. $\left|x^{2}+3x\right|>2$
4. $\left|\frac{x^{2}-5x+4}{x^{2}-4}\right|\geq 1$
5. $\left|\frac{x^{2}-3x+2}{x^{2}+3x+2}\right|\geq 1$
6. $\left|\frac{x^{2}-3x-4}{x+1}\right|\geq 2$
 |
| $$\left|f(x)\right|<g(x)$$1. $\left|x^{2}-2x-3\right|<3x-3$
2. $x^{2}-5x+9>\left|x-6\right|$
3. $\left|\left|x^{2}+5x-18\right|-x^{2}\right|\leq 18-x$
4. $x^{2}+9x+\left|3x+27\right|\leq 0$
5. $\left|x^{2}-x-3\right|+1+x<0$
6. $\left|x^{2}-3x\right|+x-2<0$
7. 8$\left|x-8\right|\leq 32+4x-x^{2}$
8. $\left|3x+27\right|\leq -x^{2}-9x$
9. $x^{2}+\left|x-1\right|\leq 1$
10. $x^{2}+\left|6x-24\right|\leq 16$
 | $$\left|f(x)\right|>g(x)$$1. $\left|x-4\right|>x^{2}-7x+12$
2. $\left|2x+3\right|\geq x^{2}$
3. $x^{2}+4\leq \left|2+3x\right|-7x$
4. $\left|3x^{2}-4x-1\right|>2x^{2}-3x+1$
5. $\left|3x^{2}-12x+6\right|>5x-4$
6. $\left|x^{2}-2\right|\geq x^{2}+2$
7. $\left|x^{2}+4x+3\right|>x+3$
8. $\left|x^{2}+2x+1\right|>x+1$
9. $\left|\left|x^{2}-9x+6\right|-x^{2}\right|\geq 6-x$
10. $x^{2}+3x+\left|x+3\right|\geq 0$
 |
| $$\left|f\left(x\right)\right|>\left|g\left(x\right)\right|$$1. $\left|2x+1\right|\geq \left|3x-2\right|$
2. $3\left|x+2\right|>2\left|x\right|$
3. $\left|x^{2}-8x+15\right|\leq \left|3-x\right|$
4. $\left|x-1\right|\geq \left|x^{2}+x-2\right|$
5. $\left|2x^{2}-x-10\right|>\left|x^{2}-8x-22\right|$
 | $$\left|f\left(x\right)\right|<\left|g\left(x\right)\right|$$1. $\left|3x-2\right|\leq \left|x-4\right|$
2. $\left|x^{2}+5x-11\right|\leq \left|x^{2}-1\right|$
3. $\left|x-3\right|\leq \left|x^{2}-9\right|$
4. $\left|x^{3}-1\right|<\left|1+x^{3}-x\right|$
5. $\left|x^{3}-x^{2}+x-5\right|<\left|x^{3}-5x^{2}+x-1\right|$
 |
| **Через ноль модуля**1. $\frac{\left|x-1\right|}{x+2}\geq 1$
2. $x^{2}+2x+\left|x-1\right|+5\leq 4\left|x+1\right|$
3. $\frac{4x}{\left|x-2\right|-1}\geq 3$
4. $\frac{6}{\left|x\right|}\geq 7+x$
5. $\left|x^{2}-1\right|+\left|x\right|<x^{2}+1$
6. $\left|x+1\right|+\left|2x-5\right|<7$
7. $\left|x^{2}+3x\right|+\left|x+5\right|\leq x^{2}+4x+9$
8. $x^{2}+2\left|x-1\right|+7\leq 4\left|x-2\right|$
9. $\frac{\left|x^{2}-4x\right|+3}{x^{2}+\left|x-5\right|}\leq 1$
10. $\frac{\left|2x+7\right|-3x-4}{x+5-\left|5x-7\right|}\leq 0$
11. $\left|x\right|\geq \frac{2x}{\left|x-3\right|}$
12. $\frac{1}{x+1}+\frac{2}{\left|x\right|-1}\geq \frac{2}{x-2}$
13. $\frac{2x-\left|x-3\right|}{\left|x-3\right|+2}<1$
14. $\frac{x^{2}-4x+3}{x^{2}-4x+4}\leq 0$
 | **Метод замены**1. $\left(8-\left|x\right|\right)\left(2-\left|x\right|\right)>0$
2. $x^{2}-4\left|x\right|<12$
3. $\frac{\left|1-x\right|+10}{4\left|1-x\right|+3}>2$
4. $\frac{x^{2}+6\left|x\right|+9}{x^{2}+\left|x\right|-6}\geq 0$
5. $\frac{x^{2}-\left|x\right|-2}{x^{2}+3\left|x\right|-4}\leq 0$
6. $\frac{x^{2}+\left|x\right|-2}{x^{2}+\left|x\right|-6}>0$
7. $\left|\frac{3\left|x\right|+2}{\left|x\right|-1}\right|<3$
8. $\left|\frac{2-3\left|x\right|}{\left|x\right|+1}\right|>1$
9. $\frac{1}{\left|x+3\right|-2}\geq \frac{2}{\left|x+3\right|-4}$
10. $\frac{1}{\left|x+1\right|-1}\geq \frac{2}{\left|x+1\right|-2}$
11. $x^{2}-4x+5\left|x-2\right|-2\leq 0$
12. $\left|\frac{x^{2}}{2}+x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|-3x+\frac{3\sqrt{2}}{2}<\frac{3x^{2}}{2}-\left|\frac{x^{2}}{2}+x-\sqrt{2}\right|$
 |
| **Метод рационализации**1. $\frac{\left|x-4\right|-\left|x-1\right|}{\left|x-3\right|-\left|x-2\right|}<\frac{\left|x-3\right|+\left|x-2\right|}{\left|x-4\right|}$
2. $\frac{\left|x-2\right|-\left|x+3\right|}{\left|x-1\right|-\left|x-2\right|}<\frac{\left|x+1\right|+\left|x\right|}{\left|x+3\right|}$
3. $\frac{\left|x-1\right|-\left|2x+1\right|}{\left|x-2\right|-\left|2x+2\right|}\geq 0$
4. $\frac{\left|2x+1\right|-\left|x-4\right|}{\left|3x-1\right|-\left|x+1\right|}\geq 0$
5. $\frac{\left|x^{2}+2x-1\right|-\left|x+1\right|}{x^{2}+x-2}\leq 0$
6. $(x^{2}-6x+9)(\left|2x+1\right|-\left|x-1\right|)\leq 0$
7. $\frac{\sqrt{-x^{2}+7x-6}}{\left|x^{2}-6x+5\right|-\left|x^{2}-2x-3\right|}\geq 0$
 | **Свойства модуля**1. $\left|x^{2}-3x+2\right|+\left|x^{2}-4\right|>\left|2x^{2}-3x-2\right|$
2. $\left|x^{2}+x-4\right|+\left|x+4\right|>\left|x^{2}+2x\right|$
3. $\left|5x^{2}-8x+3\right|-\left|7x^{2}-11x+4\right|>\left|2x^{2}-3x+1\right|$
4. $\left|x^{2}-9x+20\right|-\left|x^{2}-9x\right|\leq -20$
5. $\left|x^{2}-8x\right|-\left|x^{2}-8x+15\right|\geq 15$
 |

**В 10-11 классах следует решать неравенства с абсолютной величиной после изучения каждой темы.**

Можно использовать следующие неравенства:

|  |
| --- |
| **Многочлены**1. $\left|x^{5}-6x^{2}+9x-6\right|\geq x^{5}-2x^{3}+6x^{2}-13x+6$
2. $\left|3x^{3}-2x^{2}-5x+1\right|\leq x^{3}-2x^{2}-x+1$
3. $\left|\left|x^{3}+x-3\right|-5\right|\leq x^{3}-x+8$
4. $\frac{(x^{2}+x+1)^{2}-2\left|x^{3}+x^{2}+x\right|-3x^{2}}{10x^{2}-17x-6}\geq 0$
5. $x^{4}+5\left|x^{3}+x^{2}\right|\leq 6(x+1)^{2}$
6. $(\left|x\right|+1)(\left|x\right|-2)(\left|x\right|+3)(\left|x\right|-4)\leq 144$
7. $\frac{\left|x^{3}+x-1\right|-\left|x^{3}-x+1\right|}{\left|x-1\right|-\left|x+1\right|}\geq 0$
8. $\left|4x^{3}-x+7\right|\leq \left|2x^{3}+5x+3\right|$
9. $\left|x^{3}-3x+1\right|<3x+1$
 |
| **Иррациональные неравенства**1. $\left|\sqrt{x^{2}+x-2}-2x-1\right|>\left|\sqrt{x^{2}+x-2}+2x+2\right|$
2. $\sqrt{2x^{2}-7x-30}+\sqrt{2x^{2}-x-33}\leq \left|2x-3\right|$
3. $\frac{\sqrt{-x^{2}+2x+8}}{\left|x^{2}-7x+6\right|-\left|x^{2}-x-2\right|}\geq 0$
4. $\sqrt{x^{2}-6x+8}(\left|x-3\right|-2)\leq 0$
5. $\sqrt{2+x-x^{2}}(\left|x-1\right|-\left|3-2x\right|)\geq 0$
 |
| **Тригонометрические неравенства**1. $\left|ctg(\frac{π}{4}-\frac{x}{2})\right|\geq \sqrt{3}$
2. $\left|-(\cos(2x))^{2}+3\sqrt{-\cos(2x)}+\frac{1}{4}\right|\geq \left|(\cos(2x))^{2}+3\sqrt{-\cos(2x)}-\frac{1}{4}\right|$
3. $\left|-(\sin(x)^{2}-3\sqrt{-\sin(x)}+\frac{1}{4}\right|\leq \left|(\sin(x)^{2}-3\sqrt{-\sin(x)}-\frac{1}{4}\right|$
4. $\sin(x)+\left|\sin(x)\right|\geq 1$
5. $\sqrt{1-\sqrt{3}ctgx}∙\left|\sin(x)-\cos(x)\right|\leq 0$
6. $2\left(\sin(x)\right)^{2}-3\left|\sin(x)\right|+1<0$
7. $\left|2\cos(x)-\sqrt{2}\right|(1-2\sin(x))>0$
8. $\left|\sin(2x)\right|(tgx+\sqrt{3})\geq 0$
 |
| **Логарифмические неравенства**1. $\frac{\left|log\_{4}(x-1)\right|}{x^{2}-3x-4}\geq 0$
2. $log\_{\left|x+6\right|}2log\_{2}(x^{2}-x-2)\geq 1$
3. $\frac{log\_{7}\left(19-16x\left|x\right|\right)-log\_{49}(1-4x)^{2}}{3-4x-\left|4x-3\right|}\leq 0$
4. $\frac{1}{\left|log\_{2}2x\right|-2}\leq \frac{1}{\left|log\_{4}x^{2}\right|-1}$
5. $\frac{\sqrt{(x-1)(x-2)log\_{x^{2}}\frac{2}{x^{2}}}}{\left|x+2\right|}>\frac{x^{2}-3x+1+log\_{\left|x\right|}\sqrt{2}}{x+2}$
 |
| **Показательные неравенства**1. $\frac{(2^{x}-2)(\left|x+1\right|-2x)}{(x^{2}-3x+2)(\sqrt{x^{2}+3}-2x)}\leq 0$
2. $\left|x+1\right|^{x^{2}-x-2}<1$
3. $\left|3x^{2}-2\right|^{\sqrt{x+1}}\geq \left|3x^{2}-2\right|^{\sqrt{x}+1}$
4. $(\left|x\right|+0,5)^{3x-1}\geq (\left|x\right|+0,5)^{2-x}$
5. $\left|x-3\right|^{2x^{2}-7x}>1$
6. $\frac{0,2^{\left|x^{2}-4x+2\right|}-0,04}{3-x}\leq 0$
7. $(\frac{1}{9})^{x-\frac{x^{2}}{2}}\geq 3^{\left|3x-2\right|+2x}$
 |