**Методическая тема «Системы счисления»**

**учителя информатики и ИКТ МБОУ ФМЛ Барулиной Н.Н.**

Системы счисления - одна из традиционных тем курса информатики, восходящая к программированию ЭВМ первых поколений в машинных кодах. В настоящее время данная тема сохраняет свое значение как весьма типичный случай кодирования информации, а также в связи с широким использованием шестнадцатеричных обозначений в машинно-ориентированных разделах программирования. Знание систем счисления полезно для понимания представления данных в памяти ЭВМ и операций над ними.

Тема "Системы счисления" имеет прямое отношение к математической теории чисел. Однако в школьном курсе математики она, как правило, не изучается. Необходимость изучения этой темы в курсе информатики связана с тем фактом, что числа в памяти компьютера представлены в двоичной системе счисления, а для внешнего представления содержимого памяти, адресов памяти используют шестнадцатеричную или восьмеричную системы. Это одна из традиционных тем курса информатики или программирования.

В начале изучения темы детей надо познакомить с историей развития непозиционных и позиционных систем счисления.

Как только люди начали считать, у них появилась потребность в записи чисел.

«Все есть число», — говорили пифагорейцы, подчеркивая необычайно важную роль чисел в практической деятельности. Если мы хотим записать число 4, то это можно сделать различными способами (четыре десятичное, римское, четыре палочки, квадрат и т.д.). Все зависит от того в какой системе счисления мы будем работать. Тема нашего урока: «Системы счисления. Перевод чисел в десятичную систему счисления».

**Система счисления** – способ представления чисел и соответствующие ему правила действия над числами.

Известно множество способов представления чисел. В любом случае число изображается символом или группой символов (словом) некоторого алфавита. Будем называть такие символы **цифрами**.

Системы счисления делятся на следующие виды:

1. единичные системы (системы бирок);

2. непозиционные (кодовые) системы;

3. позиционные системы.

### Единичные системы счисления

Находки археологов на стоянках первобытных людей свидетельствуют о том, что первоначально количество предметов отображали равным количеством каких-либо значков (бирок): зарубок, черточек, точек.

Позже, для облегчения счета, эти значки стали группировать по три или по пять. Такая система записи чисел называется единичной (унарной), так как любое число в ней образуется путем повторения одного знака, символизирующего единицу. Отголоски единичной системы счисления встречаются и сегодня. Так, чтобы узнать, на каком курсе учится курсант военного училища, нужно сосчитать, сколько полосок нашито на его рукаве. Как вы думаете, где ещё в наше время используется единичная система счисления? (единичной системой счисления пользуются малыши, показывая на пальцах свой возраст, а счетные палочки используется для обучения учеников 1-го класса счету).

Единичная система — не самый удобный способ записи чисел. Записывать таким образом большие количества утомительно, да и сами записи при этом получаются очень длинными. С течением времени возникли иные, более удобные, системы счисления.

### 

### Непозиционные системы счисления

**Римская система счисления.** Примером непозиционной системы, которая сохранилась до наших дней, может служить система счисления, которая применялась более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а для обозначения чисел 100, 500 и 1000 стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (Сentum — сто, Demimille — половина тысячи, Мille — тысяча).

При этом применялось следующее **правило***: каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к его значению, а каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него.*

Например десятичное число 99 имеет вот такое представление:

XCIХ=-10+100-1+10.

Напишите, какое здесь записано число? **MCMXCVII=**

**=**1000+(-100+1000)+(-10+100)+5+3=1998

Римскими цифрами пользовались очень долго. Еще 200 лет назад в деловых бумагах числа должны были обозначаться римскими цифрами (считалось, что обычные арабские цифры легко подделать). Римская система счисления сегодня используется, в основном, для наименования знаменательных дат, томов, разделов и глав в книгах.

*Непозиционные системы счисления имеют ряд существенных недостатков:*

1. Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.

2. Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.

3. Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.

### Позиционные системы счисления

В **позиционных системах счисления** количественный эквивалент (значение) цифры зависит от ее места (позиции) в записи числа. Например, число 222. Здесь величина самой правой цифры 2 равна двум, следующей цифры – двадцать и самой левой двести.

**Количество цифр, используемых при записи числа, называется основанием позиционной системы счисления.** Наименование системы счисления соответствует ее основанию **Например, основание равно четырем, название – «четверичная система счисления». Какая система счисления используется в современной математике? (позиционная десятичная система счисления).**

Возможно множество позиционных систем, так как за основание системы счисления можно принять любое число не меньшее 2.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Система счисления** | **Основание** | **Алфавит цифр** |
| шестнадцатеричная | 16 | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F |
| десятичная |  | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 |
|  | 8 |  |
|  | 2 |  |
|  | 3 |  |

Например основание шестнадцать, название – шестнадцатеричная, алфавит: сначала идут цифры десятичной системы счисления, затем первые буквы латинского алфавита. Теперь сами заполните таблицу полностью.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Система счисления** | **Основание** | **Алфавит цифр** |
| шестнадцатеричная | 16 | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F |
| десятичная | 10 | 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 |
| восьмеричная | 8 | 0,1,2,3,4,5,6,7 |
| двоичная | 2 | 0,1 |
| троичная | 3 | 0,1,2 |

В позиционной системе счисления любое вещественное число в **развернутой форме** может быть представлено в следующем виде:

Аq= ± (an-1qn-1+an-2qn-2+...+a0q0+a-1q-1+a-2q-2+...+a-mq-m)

Здесь А — само число,

q — основание системы счисления,

ai —цифры, принадлежащие алфавиту данной системы счисления,

n — число целых разрядов числа,

m — число дробных разрядов числа.

Свернутой формой записи числа называется запись в виде

 A=an-1an-2...a1a0,a-1...a-m   
Именно такой формой записи чисел мы и пользуемся в повседневной жизни. Иначе свернутую форму записи называют естественной или цифровой.

Например:

4718,63 10=4\*103+7\*102+1\*101+8\*100+6\*10-1+3\*10-2

1001,12=1\*23+0\*22+0\*21+1\*20+1\*2-1 = 8+1+0,5 .

Самостоятельнозапишите развернутые формы для следующих чисел:

7764,18=7\*83+7\*82+6\*81+4\*80+1\*8-1 = 3584 + 448 + 48 + 4 + 0,125

3АF16 = 3\*162+10\*161+15\*160 = 768+160+15.

### *Перевод чисел из любой системы счисления в десятичную.*

### Записать число в развернутой форме.

### Поставить в соответствие каждой цифре старой системы счисления её десятичный эквивалент.

### Выполнить вычисления по правилам десятичной арифметики.

### например:

1001,12=1\*23+0\*22+0\*21+1\*20+1\*2-1 = 8+1+0,5 = 9,510.

7764,18=7\*83+7\*82+6\*81+4\*80+1\*8-1 = 3584 + 448 + 48 + 4 + 0,125 = 4084,12510

### 3АF16 = 3\*162+10\*161+15\*160 = 768+160+15 = 94310.

### Займемся решением задач:

1. Какой числовой эквивалент имеет цифра 6 в числах:

789 365 16 69?

1. Сравните числа VVV и 555.
2. Какие числа записаны римскими цифрами:

б) CMLXXXVIII; в) MCXLVII?

1. Запишите десятичные эквиваленты следующих чисел:

|  |  |
| --- | --- |
| а) А2=10,1; | б) А16=2Е5,12. |

1. Выпишите целые десятичные числа, принадлежащие следующим числовым промежуткам:

|  |  |
| --- | --- |
| а) [1011012; 1100002];  б) [148; 208]; | в) [2816; 3016]. |

## 

## Решения и ответы:

1. а) 6 тысяч; б) 6 сотен; в) 6 единиц; г) 6 десятков.
2. VVV(5+5+5=15)<555.
3. б) CM(1000-100)L(50)XXX(10+10+10)VIII(8)=988;

в) M(1000)C(100)XL(-10+50)VII(7)=1147.

1. а) 1\*21+1\*2-1=2,5; б) 2\*162+14\*16+5+1\*16-1+2\*16-2=485,07.
2. а) 45,46,47,48; б) 12,13,14,16,16; в) 40,41, ... ,47,48.

**«Перевод чисел из десятичной системы счисления в другую».**

*Перевод целых чисел*

1. Основание новой системы счисления выразить в десятичной системе счисления.

2. Последовательно выполнять деление данного числа и получаемых целых частных на основание новой системы счисления до тех пор, пока не получим частное, меньшее делителя.

3. Полученные остатки, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.

4. Составить число в новой системе счисления, записывая его, начиная с последнего остатка.

*Перевод дробных чисел*

1. Основание новой системы счисления выразить цифрами десятичной системы счисления.
2. Последовательно умножать данное число и получаемые дробные части произведений на основание новой системы до тех пор, пока дробная часть произведения не станет равной нулю или будет достигнута требуемая точность представления числа.
3. Полученные целые части произведений, являющиеся цифрами числа в новой системе счисления, привести в соответствие с алфавитом новой системы счисления.
4. Составить дробную часть числа в новой системе счисления, начиная с целой части первого произведения.

Перевод чисел из системы счисления с основанием 2 в систему счисления с основанием 2n и обратно

Перевод целых чисел. Если основание q-ичной системы счисления является степенью числа 2, то перевод чисел из q-ичной системы счисления в 2-ичную и обратно можно проводить по более простым правилам.

**Для того, чтобы целое двоичное число записать в системе счисления с основанием q=2n, нужно:**

1. Двоичное число разбить справа налево на группы по n цифр в каждой.

2. Если в последней левой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить слева нулями до нужного числа разрядов.

3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием q=2n.

Пример Число 1011000010001100102 переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем число справа налево на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

101 100 001 000 110 010

5 4 1 0 6 2

Получаем восьмеричное представление исходного числа: 5410628.

Пример Число 10000000001111100001112 переведем в шестнадцатеричную систему счисления.

Разбиваем число справа налево на тетрады и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0010 0000 0000 1111 1000 0111

4 0 0 F 8 7

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: 400F8716.

**Перевод дробных чисел. Для того, чтобы дробное двоичное число записать в системе счисления с основанием q=2n, нужно:**

1. Двоичное число разбить слева направо на группы по n цифр в каждой.

2. Если в последней правой группе окажется меньше n разрядов, то ее надо дополнить справа нулями до нужного числа разрядов.

3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием q=2n.

Пример 2.25. Число 0,101100012 переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем число слева направо на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

000, 101 100 010

0, 5 4 2

Получаем восьмеричное представление исходного числа: 0,5428.

Пример 2.26. Число 0,1000000000112 переведем в шестнадцатеричную систему счисления. Разбиваем число слева направо на тетрады и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0, 1000 0000 0011

0, 8 0 3

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: 0,80316

Перевод произвольных чисел. Для того, чтобы произвольное двоичное число записать в системе счисления с основанием q=2n, нужно:

1. Целую часть данного двоичного числа разбить справа налево, а дробную — слева направо на группы по n цифр в каждой.

2. Если в последних левой и/или правой группах окажется меньше n разрядов, то их надо дополнить слева и/или справа нулями до нужного числа разрядов;

3. Рассмотреть каждую группу как n-разрядное двоичное число и записать ее соответствующей цифрой в системе счисления с основанием q=2n

Пример 2.27. Число 111100101,01112 переведем в восьмеричную систему счисления.

Разбиваем целую и дробную части числа на триады и под каждой из них записываем соответствующую восьмеричную цифру:

111 100 101, 011 100

7 4 5, 3 4

Получаем восьмеричное представление исходного числа: 745,348.

Пример Число 11101001000,110100102 переведем в шестнадцатеричную систему счисления.

Разбиваем целую и дробную части числа на тетрады и под каждой из них записываем соответствующую шестнадцатеричную цифру:

0111 0100 1000, 1101 0010

7 4 8, D 2

Получаем шестнадцатеричное представление исходного числа: 748,D216.

Перевод чисел из систем счисления с основанием q=2n в двоичную систему. Для того, чтобы произвольное число, записанное в системе счисления с основанием q=2n, перевести в двоичную систему счисления, нужно каждую цифру этого числа заменить ее n-значным эквивалентом в двоичной системе счисления.

Пример Переведем шестнадцатеричное число 4АС3516 в двоичную систему счисления.

В соответствии с алгоритмом:

4 А С 3 5

0100 1010 1100 0011 0101

Получаем: 10010101100001101012.

Задания для самостоятельного выполнения

1 Переведите двоичные числа в восьмеричную систему счисления:

а)1010001001011; б)1010,00100101

2 Переведите двоичные числа в шестнадцатеричную систему счисления:

а)1010001001011; б)1010,00100101

3 Переведите восьмеричные и шестнадцатеричные числа в двоичную систему счисления:

а)2668; б)10,238

4. Осуществите перевод чисел по схеме А10 » А16 » А2 » А8:

а) 16547; б) 21589

Задачи для самостоятельного решения

1. Укажите через запятую в порядке возрастания все основания систем счисления, в которых запись числа 22 оканчивается на 4.
2. В системе счисления с некоторым основанием число 12 записывается в виде 110. Укажите это основание.
3. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 26, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на 22?
4. Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные натуральные числа, не превосходящие 17, запись которых в троичной системе счисления оканчивается на две одинаковые цифры?
5. Укажите, сколько всего раз встречается цифра 3 в записи чисел 19, 20, 21, …, 33 в системе счисления с основанием 6.
6. Укажите наименьшее основание системы счисления, в которой запись числа 70 трехзначна.
7. Осуществите перевод по схеме: А10→А2→А8 для числа 144
8. Сколько единиц в двоичной записи числа 195?
9. Сколько значащих нулей в двоичной записи числа 48?
10. Запись некоторого числа в шестнадцатеричной системе счисления состоит из 24 цифр. Известно, что при этом использовались только цифры A и F. Перечислите через пробел в порядке возрастания цифры, которые не могут встретиться в записи этого числа в восьмеричной системе счисления.
11. Перевести число 456 из восьмеричной в троичную систему счисления.
12. Число 20,4510 перевели в четверичную систему счисления. Найти 1999 цифру после запятой.
13. Десятичное число, переведенное в восьмеричную и в девятеричную систему, в обоих случаях заканчивается на цифру 0. Какое минимальное натуральное число удовлетворяет этому условию?
14. К записи натурального числа в восьмеричной системе счисления справа приписали два нуля. Во сколько раз увеличилось число? Ответ запишите в десятичной системе счисления.
15. Запись числа 338 в системе счисления с основанием N содержит 3 цифры и оканчивается на 2. Чему равно максимально возможное основание системы счисления?
16. Четырехзначное число, записанное в восьмеричной системе счисления имеет старшим разрядом единицу. Если эту единицу переместить в конец записи, то новое число окажется в три раза больше исходного. Определите исходное число и запишите его в восьмеричной системе счисления
17. Все 5-буквенные слова, составленные из букв И, О, У, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы.

Вот начало списка:

1. ИИИИИ

2. ИИИИО

3. ИИИИУ

4. ИИИОИ

……

Запишите слово, которое стоит под номером 240.

1. Вычислить в троичной системе счисления:
2. 12+22
3. 221+11
4. 220+12
5. Вычислить в восьмеричной системе счисления:
6. 3456+245
7. 77771+234
8. 7631-456
9. 77777-237
10. Вычислить в двоичной системе счисления:
11. 1110+101
12. 10101-11
13. 101\*11
14. 1110/10
15. Выполнить
16. 1405/145
17. 101012\*1012
18. AFF116-19D16
19. 1212113+2213
20. Найти основание системы счисления в которой справедливо данное равенство; определить неизвестные цифры отмеченные звездочками:

24\*\*1+\*235\*=116678

1. В какой системе счисления выполнено следующее сложение:

756

307

+2456

24

3767

1. Определить сумму шестнадцатеричных чисел А1, А3, А5, А7? Ответ записать в восьмеричной системе счисления.
2. Перевести число 2АВ из шестнадцатеричной системы счисления в четверичную систему счисления.
3. Сколько единиц содержится в двоичной записи результата выражения:

(**2·108)2010 – 42011 + 22012?**

1. В четырехзначном шестнадцатеричном числе третья цифра B. Если первую цифру числа переставить в конец и сложить с исходным то получится число 717D. Найти исходное число.
2. Трехзначное число, записанное в шестнадцатеричной системе счисления, увеличивается втрое от перестановки первой цифры в конец числа. Найдите максимальное из таких чисел, записанное в системе счисления по основанию 16.
3. Найдите наименьшее основание позиционной системы счисления x, при которой 104x=555y.
4. Найдите число в четверичной системе счисления, если в восьмеричной оно равно 0,2(1).
5. Найдите наименьшее основание позиционной системы счисления x, при которой 101x=505y
6. Укажите наибольшее четырёхзначное шестнадцатеричное число, двоичная запись которого содержит ровно 9 нулей. В ответе запишите только само шестнадцатеричное число, основание системы счисления указывать не нужно.
7. Решите уравнение . Ответ запишите в десятичной системе счисления.

*Используемые электронные ресурсы:*

<http://durak90.narod.ru/metod.htm>

<http://www.tadviser.ru/index.php/Статья:Система_счисления>

<http://kpolyakov.narod.ru/school/ege/generate.htm>

*Список дополнительной литературы:*

1. И.Г. Семакин «Преподавание базового курса информатики в средней школе».
2. И.Г. Семакин «Базовый курс 7-9».
3. И.Г. Семакин «Задачник - практикум».
4. Н.Д. Угринович «Информатика и информационные технологии».