Фундаментальные и прикладные науки сегодня

Fundamental and applied sciences today XI

Vol. 1

spc Academic

Материалы XI международной научно-практической конференции

Фундаментальные и прикладные науки сегодня

10-11 апреля 2017 г.

North Charleston, USA

Том 1

Физико-математические науки

Филологические науки

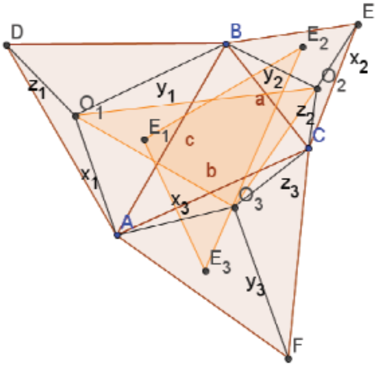
Гавриленко Г.Ю., учитель математики МБОУ «Физико-математический лицей» г. Сергиев Посад Московской области
Смирнов А.С., обучающийся МБОУ «Физико-математический лицей» г. Сергиев Посад Московской области

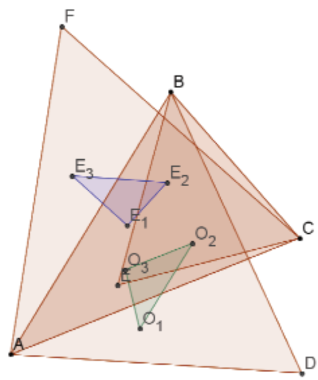
ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ НАПОЛЕОНА И ЕЕ АНАЛОГА ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА (ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕБО)

Задача Наполеона [1] – одна из красивых и интересных теорем математики. Она до сих пор волнует умы людей и продолжает свое развитие. Находятся и открываются все новые обобщения этой теоремы, следствия из нее. В своей работе я привожу еще одно обобщение теоремы Наполеона и ее аналога для параллелограмма (первой теоремы Тебо).

Теорема 1

На сторонах произвольного треугольника ABC внешним





(внутренним) образом построим правильные треугольники ADB; BEC; CFA. В ΔADB выберем произвольную точку O_1. Выполним поворот треугольника ADB вокруг точки B, так чтобы сторона DB совместилась со стороной BC, а затем гомотетию относительно точки B. Данные преобразования переведут треугольник ADB в треугольник ECB, а точку O_1 в точку O_2. Аналогичные преобразования проделаем с треугольником ECB и получим точку O_3. Возьмем точку E_1 и расположим ее на тех же расстояниях от вершин правильного треугольника ADB, что и точка O_1 (таких точек мы можем выбрать 6). При указанных преобразованиях точка E_1 переходит в точки E_2 и E_3. Получим равные треугольники $O_1O_2O_3$ и $E_1E_2E_3$.

1. Рассмотрим $\Delta O_1O_2O_3$.

Обозначим $O_1A = x_1$, $O_1B = y_1$, $O_1D = z_1$, $O_2E = x_2$, $O_2B = y_2$, $O_2C = z_2$ и $O_3A = x_3$, $O_3F = y_3$, $O_3C = z_3$,

$\angle$BAC=α; $\angle$ABC=β; $\angle$ACB=γ.

Так как $\Delta AO_1B \sim \Delta EO_2B$ (по двум углам), то
$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{BE}{AB} = \frac{a}{c}$;
$x_2 = x_1 \cdot \frac{a}{c}$; $y_2 = y_1 \cdot \frac{a}{c}$.
Так как $\Delta AO_1D \sim \Delta EO_2C$ (по двум углам), то
$\frac{x_2}{x_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{CE}{AD} = \frac{a}{c}$ и $z_2 = z_1 \cdot \frac{a}{c}$.
Аналогично из подобия других треугольников:
$x_3 = x_1 \cdot \frac{b}{c}$, $y_3 = y_1 \cdot \frac{b}{c}$ и $z_3 = z_1 \cdot \frac{b}{c}$.
Найдем стороны треугольника по теореме косинусов:

$$O_1O_3{}^2 = x^2{}_1 + x^2{}_3 - 2 \cdot x_1 \cdot x_3 \cdot \cos(60+\alpha);$$

$$O_1O_3^2 = x_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot x_1{}^2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \cos(60+\alpha) \ \mathbf{(1)}$$

$$O_1O_2^2 = y_1{}^2 + y_1{}^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} - 2 \cdot y_1{}^2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \cos(60+\beta);$$

$$O_2O_3^2 = z_1{}^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} + z_1{}^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot z_1{}^2 \cdot \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot \cos(60+\gamma).$$

2. Рассмотрим $\Delta E_1E_2E_3$.

$\Delta E_1BA = \Delta O_1AD$ (по стороне и двум прилежащим углам), тогда

$E_1B = x_1$, $E_1D = y_1$, $E_1A = z_1$ и аналогично $E_2B = x_2$, $E_2C = y_2$, $E_2E = z_2$ и $E_3F = x_3$, $E_3C = y_3$, $E_3A = z_3$.
По теореме косинусов из ΔE_1BE_2:

$$E_1E_2^2 = x_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} - 2 \cdot x_1{}^2 \cdot \frac{a}{c} \cdot \cos(60+\beta) \ \mathbf{(2)}$$

$$E_2E_3^2 = y_1{}^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} + y_1{}^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot y_1{}^2 \cdot \frac{a \cdot b}{c^2} \cdot \cos(60+\gamma);$$

$$E_1E_3^2 = z_1{}^2 + z_1{}^2 \cdot \frac{b^2}{c^2} - 2 \cdot z_1{}^2 \cdot \frac{b}{c} \cdot \cos(60+\alpha).$$

3. Умножим обе части уравнений (1) и (2) на c^2

$$c^2 \cdot O_1O_3^2 = c^2 \cdot x_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot b^2 - 2 \cdot x_1{}^2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(60+\alpha)$$

$$c^2 \cdot O_1O_3^2 = c^2 \cdot x_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot b^2 - x_1{}^2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha + \sqrt{3} \cdot x_1{}^2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$c^2 \cdot E_1E_2^2 = c^2 \cdot x_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot a^2 - 2 \cdot x_1{}^2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(60+\beta)$$

$$c^2 \cdot E_1E_2^2 = c^2 \cdot x_1{}^2 + x_1{}^2 \cdot a^2 - x_1{}^2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta + \sqrt{3} \cdot x_1{}^2 \cdot a \cdot c \cdot \sin\beta$$

$$c^2 \cdot O_1O_3^2 = c^2 \cdot x^2{}_1 + x_1{}^2 \cdot b^2 - x_1{}^2 \cdot \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2} + \sqrt{3} \cdot x_1{}^2 \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

$$c^2 \cdot O_1O_3^2 = \frac{c^2 \cdot {x_1}^2}{2} + \frac{{x_1}^2 \cdot b^2}{2} + \frac{{x_1}^2 \cdot a^2}{2} + \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$c^2 \cdot E_1E_2^2 = c^2 {x_1}^2 + {x_1}^2 \cdot a^2 - {x_1}^2 \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$$

$$c^2 \cdot E_1E_2^2 = \frac{c^2 \cdot {x_1}^2}{2} + \frac{{x_1}^2 \cdot a^2}{2} + \frac{{x_1}^2 \cdot b^2}{2} + \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$$

Таким образом, $O_1O_3^2 = E_1E_2^2$

Аналогично доказывается равенство других соответствующих сторон треугольников, а значит $\Delta O_1O_1O_3 = \Delta E_1E_2E_3$ (по трем сторонам).

Таких равных треугольников можно получить – 6.

Теорема доказана.

Если вершины треугольника $\Delta O_1O_2O_3$ лежат на одной из высот правильного треугольника, то $\Delta O_1O_2O_3$ - равнобедренный.

Например, если $x_1 = y_1$ (точка O_1лежит на высоте правильного треугольника, проведенной из вершины D), то $O_1O_3 = O_1O_2$ и $\Delta O_1O_2O_3$ - равнобедренный. Действительно,

$$c^2 \cdot O_1O_3^2 = \frac{c^2 \cdot {x_1}^2}{2} + \frac{{x_1}^2 \cdot b^2}{2} + \frac{{x_1}^2 \cdot a^2}{2} + \sqrt{3} \cdot {x_1}^2 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$c^2 \cdot O_1O_2^2 = \frac{{y_1}^2 \cdot c^2}{2} + \frac{{y_1}^2 \cdot b^2}{2} + \frac{{y_1}^2 \cdot a^2}{2} + \sqrt{3} \cdot {y_1}^2 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta$$

Таких равнобедренных треугольников – 3

Если $x_1=y_1=z_1$, то $\Delta O_1O_2O_3$ - равносторонний, и мы получаем теорему Наполеона, как частный случай.

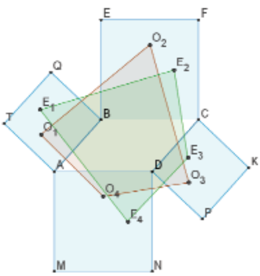
Если точка O_1 лежит в одной из вершин треугольника ADB, то треугольник $O_1O_2O_3$ превращается в один из отрезков DC, AE или BF, которые будут равны между собой [2,380].

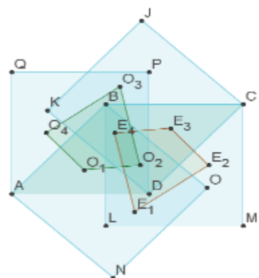
Теорема 2

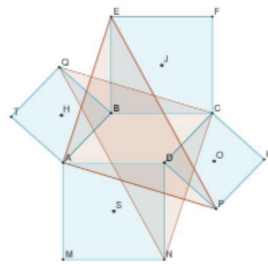
На сторонах параллелограмма ABCD внешним (внутренним) образом построим квадраты ATQB; BEFC; CKPD; AMND. В квадрате ATQB выберем произвольную точку O_1. Выполним поворот четырёхугольника ATQB вокруг точки B, так чтобы сторона QB совместилась со стороной BC, а затем гомотетию относительно точки B. Данные преобразования переведут квадрат ATQB в квадрат BEFC, а точку O_1 в точку O_2. Аналогичные преобразования проделаем с квадратом BEFC и CKPD и получим точки O_3 и O_4. Возьмем точку E_1 и расположим ее на тех же расстояниях от вершин правильного четырёхугольника ATQB, что и точка O_1 (таких точек мы можем выбрать 8). При указанных преобразованиях точка E_1 переходит в точки E_2, E_3 и E_4. Получим равные четырёхугольники $O_1O_2O_3O_4$ и $E_1E_2E_3E_4$.

Если точка O_1 расположена в центре квадрата, то мы получаем теорему аналогичную теореме Наполеона для параллелограмма (первую теорему Тебо), как частный случай.

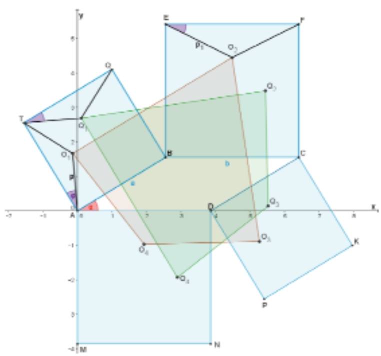
Если точка O_1 расположена в одной из вершин четырёхугольника ATQB (например, совмещается с точкой Q), то четырёхугольник $O_1O_2O_3O_4$ преобразуется в равнобедренный прямоугольный треугольник QCN.







Приведем доказательство координатным способом.



Пусть дан параллелограмм ABCD. На его сторонах внешним образом построим квадраты ATQB, BEFC, CKPD, AMND.

Введем прямоугольную систему координат, так чтобы начало совпадало с точкой A, а ось OX содержала прямую AD.

Найдём координаты вершин четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$:

$$O_1(-p\cdot cos(90^\circ-\alpha+\varphi);\ p\cdot sin(90^\circ-\alpha+\varphi))$$

$$O_2(p_1\cdot cos\,\varphi+a\cdot\ cos\,\alpha\,;\ b-p_1\cdot sin\,\varphi+a\cdot sin\,\alpha)$$

$$O_3(b+a\cdot cos(90^\circ-\alpha)-p\cdot cos(90^\circ-\alpha+\varphi)\,;-a\cdot sin(90^\circ-\alpha)+ \\ +p\cdot sin(90^\circ-\alpha+\varphi))$$

$$O_4(p_1\cdot cos\,\varphi;\ -p_1\cdot sin\,\varphi)$$

Так как $\Delta TO_1A \sim \Delta FO_2E$(по 2 углам), то $p_1 = \frac{b}{a} \cdot p$.

Найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{O_1O_2}(\frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi + a \cdot \cos\alpha + p \cdot \sin(\alpha - \varphi);\ b - \frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi + a \cdot \sin\alpha - \\ - p \cdot \cos(\alpha - \varphi))$$

$$\overrightarrow{O_2O_3}(b + a \cdot \sin\alpha - p \cdot \sin(\alpha - \varphi) - \frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - a \cdot \cos\alpha\,;$$

$$-a \cdot \cos\alpha + p \cdot \cos(\alpha - \varphi) - b\ + \frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi - a \cdot \sin\alpha)$$

$$\overrightarrow{O_3O_4}(\frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - b - a \cdot \sin\alpha + p \cdot \sin(\alpha - \varphi)\,;$$

$$-\frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi + a \cdot \cos\alpha - - p \cdot \cos(\alpha - \varphi))$$

$$\overrightarrow{O_1O_4}(\frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi + p \cdot \sin(\alpha - \varphi)\,; -\frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi - p \cdot \cos(\alpha - \varphi))$$

$$\overrightarrow{O_1O_3}(b + a \cdot \sin\alpha\,; -a \cdot \cos\alpha)$$

$$\overrightarrow{O_2O_4}(-a \cdot \cos\alpha\,; -b - a \cdot \sin\alpha)$$

Найдём координаты вершин четырёхугольника $Q_1Q_2Q_3Q_4$:

$$Q_1(p \cdot \cos(\alpha - \varphi) - a \cdot\ \cos(90^\circ - \alpha)\,;\ p \cdot \sin(\alpha - \varphi) + a \cdot \sin(90^\circ - \alpha))$$

$$Q_2(b - p_1 \cdot \sin\varphi + a \cdot\ \cos\alpha\,; b - p_1 \cdot \cos\varphi + a \cdot \sin\alpha)$$

$$Q_3(b +\ p \cdot \cos(\alpha - \varphi); p \cdot \sin(\alpha - \varphi))$$

$$Q_4(b - p_1 \cdot \cos(90^\circ - \varphi); - p_1 \cdot \sin(90^\circ - \varphi))$$

Аналогично из подобия других треугольников: $p_1 = \frac{b}{a} \cdot p$.

Найдём координаты векторов:

$$\overrightarrow{Q_1Q_2}(b - \frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi + a \cdot \cos\alpha - p \cdot \cos(\alpha - \varphi) + a \cdot \sin\alpha\,;$$

$$b - \frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - p \cdot \sin(\alpha - \varphi) - a \cdot \cos\alpha + a \cdot \sin\alpha)$$

$\overrightarrow{Q_2Q_3}(p \cdot cos(\alpha - \varphi) + \dfrac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi - a \cdot cos\,\alpha\,;$

$p \cdot sin(\alpha - \varphi) - b + b\frac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi - a \cdot sin\,\alpha)$

$\overrightarrow{Q_3Q_4}(-\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi - p \cdot cos(\alpha - \varphi)\,; -\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi - p \cdot sin(\alpha - \varphi))$

$\overrightarrow{Q_1Q_4}(-\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi - p \cdot cos(\alpha - \varphi) + a \cdot sin\,\alpha + b;$

$-\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi - p \cdot sin(\alpha - \varphi) - a \cdot cos\,\alpha)$

$\overrightarrow{Q_1Q_3}(b + a \cdot sin\,\alpha\,; -a \cdot cos\,\alpha)$

$\overrightarrow{Q_2Q_4}(-a \cdot cos\,\alpha\,; -b - a \cdot sin\,\alpha)$

Найдём квадраты длин этих векторов:

$O_1{O_2}^2 = (\frac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi + a \cdot cos\,\alpha + p \cdot sin(\alpha - \varphi))^2 + (b - \frac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi +$
$+a \cdot sin\,\alpha - p \cdot cos(\alpha - \varphi))^2$

$O_2{O_3}^2 = \left(b + a \cdot sin\,\alpha - p \cdot sin(\alpha - \varphi) - \frac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi - a \cdot cos\,\alpha\right)^2 +$

$+(-a \cdot cos\,\alpha + p \cdot cos(\alpha - \varphi) - b + \dfrac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi - a \cdot sin\,\alpha)^2$

$O_3{O_4}^2 = \left(\frac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi - b - a \cdot sin\,\alpha + p \cdot sin(\alpha - \varphi)\right)^2 +$

$+(-\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi + a \cdot cos\,\alpha - p \cdot cos(\alpha - \varphi))^2$

$O_1{O_4}^2 = (\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot cos\,\varphi + p \cdot sin(\alpha - \varphi))^2 +$

$+(-\dfrac{b}{a} \cdot p \cdot sin\,\varphi - p \cdot cos(\alpha - \varphi))^2$

$O_1{O_3}^2 = (b + a \cdot sin\,\alpha)^2 + a^2 \cdot cos^2\,\alpha$

$O_2{O_4}^2 = a^2 \cdot cos^2\,\alpha + (b + a \cdot sin\,\alpha)^2$

$$Q_1Q_2{}^2 = \left(b - \frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi + a \cdot \cos\alpha - p \cdot \cos(\alpha - \varphi) + a \cdot \sin\alpha\right)^2 +$$

$$+(b - \frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - \ p \cdot \sin(\alpha - \varphi) - a \cdot \cos\alpha + a \cdot \sin\alpha)^2$$

$$Q_2Q_3{}^2 = \left(p \cdot \cos(\alpha - \varphi) + \frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi - a \cdot \cos\alpha\right)^2 +$$

$$+(p \cdot \sin(\alpha - \varphi) - b + \frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - a \cdot \sin\alpha)^2$$

$$Q_3Q_4{}^2 = (-\frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi - p \cdot \cos(\alpha - \varphi))^2 +$$

$$+(-\ \frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - p \cdot \sin(\alpha - \varphi))^2$$

$$Q_1Q_4{}^2 = \left(-\frac{b}{a} \cdot p \cdot \sin\varphi - p \cdot \cos(\alpha - \varphi) + a \cdot \sin\alpha + b\right)^2 +$$

$$+(-\ \frac{b}{a} \cdot p \cdot \cos\varphi - p \cdot \sin(\alpha - \varphi) - a \cdot \cos\alpha)^2$$

$$Q_1Q_3{}^2 = (b +\ a \cdot \sin\alpha)^2 + a^2 \cdot \cos^2\alpha$$

$$Q_2Q_4{}^2 = a^2 \cdot \cos^2\alpha + (b + a \cdot \sin\alpha)^2$$

Получаем, что $Q_1Q_4 = O_1O_2;\ Q_3Q_4 = O_1O_4;\ Q_2Q_3 = O_3O_4;$ $Q_1Q_2 = O_2O_3;\ \ Q_1Q_3 = O_1O_3;\ Q_2Q_4 = O_2O_4.$

Значит, треугольники $\Delta Q_1Q_2Q_3$ и $\Delta O_2O_3O_4$ равны по трем сторонам. Тогда $\angle Q_1Q_2Q_3 = \angle O_2O_3O_4$. Аналогично доказывается равенство и других углов четырехугольников.

Таким образом, данные четырехугольники имеют равные стороны и соответствующие равные углы, то получившиеся четырёхугольник равны.

Теорема доказана.

Используемая литература:

1. Свободная энциклопедия: [сайт].https://ru.wikipedia.org/
2. Планиметрия. Пособие для углубленного изучения математики. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.В. и др. М: Физматлит, 2005