Управление образования

Администрации Сергиево-Посадского муниципального района

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Физико-математический лицей»

**Консультация для учителей по теме**

**«Основные методы решения иррациональных неравенств»**

 Учитель математики

 Чумичева Л.В.

2017-2018 учебный год

Как показывает практика, учащиеся школ, абитуриенты испытывают особые затруднения при решении иррациональных неравенств. Это связано с тем, что в школьной математике этот раздел рассматривается недостаточно, не рассматриваются, более расширенно, различные методы решения таких неравенств. Также учителя школ ощущают нехватку методической литературы, которая проявляется в ограниченном количестве задачного материала с указанием различных подходов, методов решения.

 **I. Неравенства вида >g(x), < g(x), g(x), *g(x)***

*Рассуждения при решении неравенств вида*

*1.>g(x); 2. < g(x); 3. g(x); 4. g(x) можно кратко записать в виде следующих схем:*

*I. >g(x) *  *2. < g(x) *

*3. g(x) *   *4. g(x) *.

**Пример 1:** < 1+2*х*.

 **Ответ:** *х* .

**Решение:** Исходное неравенство равносильно системе 

х>0

**Пример 2:** Решить неравенство> *х* + 1

**Решение:** ОДЗ неравенства: *х*-3. Для правой части есть два возможных случая:

а) *х* + 10 (правая часть неотрицательна) или б) *х* + 1 < 0 (правая часть отрицательна)

Рассмотрим а) Если *х* +10, т.е. *х* - 1, то обе части неравенства неотрицательны. Возводим обе части в квадрат: *х* + 3 > *х*+ 2*х* + 1. Получаем квадратное неравенство *х*+ *х* – 2 < 0, которое выполняется при – 2< *x* < 1. Но, учитывая, что *х* - 1, получаем -1 

Рассмотрим б) Если *х* +1<0, т.е. если *х* < - 1, то исходное неравенство выполняется при *х* -3

Объединяя решения случая а) -1 и б) *х*-3, запишем ответ: *х* .

Все рассуждения при решении примера 7 удобно записать так:

 Исходное неравенство равносильно совокупности систем неравенств **.**

 ****х

**Ответ:** .

**II. Неравенства вида**

**; ; ; **

|  |
| --- |
| * 1. *;*
 |
| * 1. *;*
 |
| * 1. *;*
 |
| * 1. .
 |

**Пример 3:** Решите неравенство 

**Решение:** Исходное неравенство равносильно системе 

Решив систему, получим ответ .

***Замечание: При решении неравенств вида ,(С>0) и , учитываем, что f(x), g(x) h(x).***

**Пример 4**: Решить неравенство 

**Решение:** Применяя свойство корней  в области определения неравенства, получим неравенство ,

 которое будет равносильно системе .

Решив систему, получим .

**Ответ:** 

III. Неравенства, содержащие несколько корней чётной степени

При решении неравенств, содержащих несколько корней чётной степени, прежде всего, следует привести его к виду, при котором обе части неотрицательны при всех допустимых значениях х. Тогда на ОДЗ этого неравенства возведение в чётную степень является равносильным преобразованием, после выполнения которого и приведения подобных неравенство сводится к более простому. В некоторых случаях рекомендуется найти область определения неравенства (область допустимых значений) – эта область может:

 1) состоять из конечного числа значений переменной. Тогда полученные значения являются возможными решениями неравенства – надо проверить подстановкой.

2) являться пустым множеством. Тогда исходное неравенство заведомо не имеет решения.

**Пример 5:** Решить неравенство 

**Решение:** Найдём ОДЗ: -3

Исходное неравенство перепишем в виде , что обеспечивает неотрицательность обеих частей неравенства. Возведём обе части неравенства в квадрат:  $⇔$ 2 – *х* 4+*х* + 2+*х*+3

После преобразований получим неравенство вида *g(x).*

2-3х–5.





**Ответ:** *х*

* 1. **Метод замены переменной**

В некоторых случаях полезно упростить решение неравенства, сделав замену переменной.

**Пример 6:** Решить неравенство 

**Решение:** Найдём ОДЗ исходного неравенства .

Учитывая ОДЗ, решим неравенство.

Введём переменную t = 3х+5х +2.

Исходное неравенство примет вид 

Найдём ОДЗ полученного неравенства: t.

Перепишем неравенство в виде  и возведём обе части неравенства в квадрат (можно возвести в квадрат, т.к. обе части неравенство неотрицательны при t ):

t + 5 >1 + 2+ t  2> 4 t > 4, что удовлетворяет условию t.

Перейдём к обратной замене: 3х+5х +2 > 4 +5x – 2 > 0 . Это квадратное неравенство. Легко решить стандартными методами: или разложением на множители и составлением совокупности систем неравенств, или методом интервалов.

Решение полученного квадратного неравенства .

**Ответ:** 

**V. Использование преобразований подкоренного выражения в иррациональных неравенствах**

Умелое использование выделения из алгебраического выражения полный квадрат позволяет намного упростить решение сложного, на первый взгляд, неравенства.

*(Полный квадрат )*

**Пример 7:** Решить неравенство 

**Решение:** Выделим полный квадрат в подкоренных выражениях: 



и, наконец, освобождаясь от модуля, получим неравенство, равносильное исходному неравенству:

, откуда 

 **Ответ:** 

**VI. Графическое решение иррациональных неравенств**

Иногда бывает проще решить неравенство графически. *Но надо помнить, что график, вернее, эскиз графика (в дальнейшем – график), лишь помогает найти решение. Утверждать, что из графика следует ответ, нельзя. Ответ надо обосновать (график помогает выяснить, на какие множества надо разбить, например, ось ОХ, чтобы на каждом из них «увидеть» решение неравенства).* Итак, чтобы решить неравенство графически, строим эскизы графиков функций, стоящих в правой и левой частях. Находим точку пересечения графиков функций, для чего решаем уравнение, а затем, по графику получаем решение неравенства.

Все приведённые ниже примеры неравенств, можно решить стандартным методом, а многие неравенства, рассмотренные выше, можно решить и графическим способом.

**Пример 8:** Решить неравенство 

**Решение:** Построим графики функций у = (ОДЗ: х ) и

 у = .

Посмотрим, при каких х график функции у = расположен выше графика функции у = .

Y

-3

1

6

X

Найдём абсциссу точки пересечения графиков функций, проверим правильность найденной абсциссы, для чего решим уравнение  .

По рисунку замечаем, что график функции у = расположен выше (а значит её значение больше) графика функции у =  при .

**Ответ:** 

**VII. Примеры решения иррациональных неравенств непосредственно методом интервалов**

***(Многие из неравенств, предложенных выше, легко решаются непосредственно методом интервалов)***

**Пример 9:** Решить неравенство .

**Решение:** Рассмотрим функцию f(x) = . И надо найти те значения х, при которых функция f(x)<0.

1) Найдём область определения D(f), для чего решим систему неравенств

 .

Имеем , т.е. D(f)=

2) Найдём нули функции, для чего решим уравнение

 = 0 (решите самостоятельно). Это уравнение имеет корень - единственный нуль функции f(x).

1. Отмечаем на числовой прямой .



2

–

+

 Эта точка разделила луч  на два промежутка. Если , то f(*x*)>0; если , то f(*x*)<0. Ответ 

**Пример 10:** Решить неравенство .

**Решение:** Рассмотрим функцию f(x) = . И тогда надо найти те значения х, при которых функция f(x) неотрицательна (f(x)).

1) Найдём область определения: D(f) = 

2) Найдём нули функции: =0 (решите самостоятельно). Уравнение имеет два корня , т.е. функция имеет два нуля: 

3) Отметим  на числовой прямой.

Если , то f(x); если , то f(x); если , то f(x).Т.о., функция f(x) =  неотрицательна при 

**Ответ:**.

**Пример 11:** Решить неравенство: .

**Решение:** Преобразуем данное неравенство: . Рассмотрим функцию у = . Найдём область определения функции:  .

 Нули функции: -4, 2, 3.

Решение исходного неравенства .

 **Ответ:** .

**VIII. Примеры решения иррационального неравенства методом замены функции.**

Решение некоторых сложных неравенств, в том числе и иррациональных, значительно упрощается при использовании следующего утверждения:

***Если область определения, нули и промежутки знакопостоянства функции f(x) соответственно совпадают с область определения, нулями и промежутками знакопостоянства функции g(х), то неравенства р(х) f(х) и р(х) g(х) равносильны.(\*)***

Из решений неравенств вида:

1)  и 2) 

 получаем следующее следствие: Знак  совпадает со знаком в ОДЗ *х.*

И согласно утверждению (\*) функцию *у(х)* =  можно заменить на более простую *у(х)* =  для всех *f(x) и g(x).* Т.о.

**** и **.**

При нечётных n:

.

**Пример 12:** Решить неравенство .

**Решение:** .

**Ответ:** (1;).

**Пример 13:** Решить неравенство .

**Решение:** .

Отсюда следует: 

**Ответ:** .