**Построение касательных к коническому сечению, заданному пятью точками.**

Автор: Товкес Артем Александрович.

Введение

 В книге «Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе » [1] Исаак Ньютон продемонстрировал возможности «применения анализа к прямолинейной геометрии», а именно, показал, как геометрическую задачу свести к решению алгебраического уравнения. Среди задач, рассмотренных Ньютоном, есть такая (задача LIX): «Описать коническое сечение, проходящее через пять данных точек». При решении это задачи Ньютон не использовал ни теорему Паскаля, ни метод координат, вероятно, известные ему. Вопрос о построении касательных к коническому сечению, заданному пятью точками, Ньютон не ставил.

 ***Цель работы:*** циркулем и линейкой построить касательные к коническому сечению, заданному пятью точками общего положения: проходящую через заданную точку на коническом сечении, проходящую через заданную точку вне конического сечения, параллельную заданной прямой.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие ***задачи:***

1. установить вид конического сечения;
2. если это парабола – построить её ось, вершину, фокус и директрису, если это эллипс или гипербола – построить вершину и фокусы;
3. найти способы построения касательных в перечисленных случаях.

 При работе над поставленной темой использовались книги [1,2,3].

Книга Ньютона [1] помогла сформулировать цель работы; в книге [2] найдены леммы, а в книге [3] – задачи, на основе которых выполнены построения касательных.

 Определение вида конического сечения и построение осей, вершин, фокусов и директрис, выполненные Ньютоном в книге [1], здесь выполняются с помощью теоремы Паскаля и метода координат и вынесены в Приложение.

# 1.Построение касательных к параболе

 Для построения касательных к параболе, перечисленных в цели работы, достаточно иметь на плоскости уже построенные фокус и директрису.

1.1 Построение касательной, проходящей через заданную точку на параболе

Построение касательной, проходящей через заданную точку на параболе, основано на лемме [2]: если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ попадет на директрису и будет проекцией точки касания. Таким образом, серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему фокус F и проекцию A’ заданной точки А на директрису d –искомая касательная.

******

F

d******

A’

A

 Другой способ построения основан на оптическом свойстве параболы: перпендикуляр к биссектрисе угла между диаметром, проходящим через заданную точку А, и отрезком FA, соединяющим эту точку с фокусом – искомая касательная.



A

F

1.2 Построение касательной, проходящей через заданную точку вне параболе

 Построение касательной, проходящей через заданную точку вне параболы, основано на лемме [2]: касательные к параболе в точках А и В пересекаются в центре P описанной окружности треугольника FA’B’, где А’ и В’ – проекции точек А и В на директрису параболы. Таким образом, построив окружность с центром в заданной точке P радиуса PF, найдем точки A’ и B’; серединные перпендикуляры к отрезкам FA’ и FB’ – искомые касательные. Точки касания А и В – это точки пересечения касательных с перпендикулярами к директрисе, восстановленными из точек A’ и B’.



A’

P

B’

B

F

A

1.3 Построение касательной, параллельной заданной прямой

 Выберем систему координат такую, чтобы уравнение параболы имело вид y = $\frac{Y1 \*X²}{X1²}$, где А – одна из пяти заданных точек. Уравнение касательной ищем в виде y=k\*x-b, где k известен, а b следует найти. Из условия единственности решения соответствующей системы уравнений найдем b =$ \frac{k²\*X1²}{Y1}$ и координаты точки касания хo =$ \frac{b}{2\*k}$ и уo = $\frac{b}{4}$ .Зная отрезки х1 и y1 , можем построить отрезки b, xo ,yo .

# 2.Построение касательных к эллипсу и гиперболе

 Для построения касательных к эллипсу и гиперболе достаточно иметь на плоскости уже построенные фокусы и вершины, которые лежат на одной оси с фокусами.

# 2.1.Построение касательной, проходящей через заданную точку на эллипсе (гиперболе)

 Уравнение касательной к эллипсу в точке (х0,у0) есть х\*$\frac{х0}{a²}$ + у\*$\frac{у0}{b²}$=1; касательная пересекает ось абсцисс в точке ($\frac{a²}{х0}$ ,0). В этой же точке пересекает ось абсцисс и касательные к окружности, построенной на большой оси эллипса как на диаметре, в точках (х0 , $\pm \sqrt{ a²-х0²}$ ).Таким образом, следует построить указанную окружность , провести через заданную точку А перпендикуляр к большой оси эллипса до пересечения с окружностью в точке А’, построить касательную к окружности в точке А’ и найти А’’ пересечения этой касательной с прямой, содержащей большую ось эллипса. Прямая АА’’ – искомая касательная.



F1

F2

А

А'

А''

 Другой способ основан на оптическом свойстве эллипса: касательная перпендикулярна биссектрисе угла F1AF2.

 Уравнение касательной к гиперболе в точке А(х0,у0) есть х\*$\frac{х0}{a²}$ $-$ у\*$\frac{у0}{b²}$ = 1; касательная пересекает ось абсцисс в точке В($\frac{b²}{х0}$ ,0).Отрезок длиной $\frac{a²}{х0}$ можно построить циркулем и линейкой; прямая АВ – искомая касательная.

 Другой способ основан на оптическом свойстве гиперболы: касательная перпендикулярна биссектрисе угла, дополнительного к углу F1AF2.

# 2.2.Построение касательной, проходящей через заданную точку вне эллипса(гиперболы)

 Предлагаемые построения основаны на задаче 31.12 из книги [3], условие которой можно сформулировать так: основания перпендикуляра, опущенного из фокуса на касательную к эллипсу, лежит на окружности, построенной на большой оси как на диаметре. Так как о гиперболе не упоминается, докажем это свойство одновременно для эллипса и гиперболы, при этом «большую ось» надо заменить на «действительную ось».

 Далее верхний знак относится к эллипсу, нижний – к гиперболе;

с=$\sqrt{ a²\mp b²}$ - абсцисса фокуса.

 Уравнение касательной в точке (х0,у0): х\*$\frac{х0}{a²}$ ± у\*$\frac{у0}{b²}$ = 1; уравнение прямой, проходящей через фокус и перпендикулярной касательной: х\*$\frac{у0}{b²}$∓ у\*$\frac{х0}{a²}$ =с\*$\frac{у0}{b²}$ ; координаты точки их пересечения: х= ( $\frac{х0}{a²}$ + с\*$\frac{у0²}{b⁴} $)/( $\frac{х0}{a²}$ + $\frac{у0²}{b⁴}$ ),

 у = ±( $\frac{у0}{b²}$ - х0\*с\*$\frac{у0}{b²a²}$ )/($ \frac{х0²}{a⁴}$ +$\frac{у0²}{b⁴}$ ).Квадрат расстояния от начала координат до пересечения : х2+у2== (1+ с\*$\frac{у0²}{b⁴} $)/( $ \frac{х0²}{a⁴}$ + $\frac{у0²}{b⁴}$ ).Вычислим разность х2+у2 – *а*2=(с2– *а*2±*b*2)( $ \frac{у0²}{b⁴}$ ) ( $ \frac{х0²}{a⁴}$ + $\frac{у0²}{b⁴}$ )=0, что и требовалось доказать.

 Таким образом, искомые касательные, проходящие через заданную точку А, проходят через точки пересечения окружностей, построенных на большой (действительной) оси и на отрезке AF2 как на диаметрах.



A

A’

F2

F1



A

A’

F2

 Заметим, что этот способ можно добавить к тем, которые перечислены в п.2.1. При этом окружности будут касаться друг друга. Отсюда следует способ построения точек касания: надо построить окружность, проходящую через фокус F2 и касающуюся окружности, построенной на большой (действительной) оси, в точке А’.

# 2.3.Построение касательной, параллельной заданной прямой

 Выберем систему координат такую, чтобы уравнения эллипса и гиперболы имели вид $\frac{ x²}{a²}$ ±$ \frac{ y²}{b²}$ =1. Уравнение касательной ищем в виде y=k\*x+d, где k известен, а d следует найти. Из условия единственности решения соответствующей системы уравнений найдем d=±$\sqrt{k²a²+b²}$ для эллипса и d=±$\sqrt{k²a²-b²}$ для гиперболы. Координаты точек касания х0= - k*a*2/d , y0= ±*b*2/d, зная отрезки *а* и *b*, можно построить отрезки d, х0, y0.

 Таким образом,поставленная цель достигнута.

# Приложение

#  П.1.Определение вида конического сечения

 Пусть на плоскости даны точки А, В, С, D, Е общего положения (никакие три из них не лежат на одной прямой) .

******

F

А

D

В

C

Q

Е

P

 Построим точку F так, чтобы AF || CD. Для этого найдём точку P пересечения прямых АВ и DE; через точку P проведем прямую, параллельную CD; найдём точку Q пересечения этой прямой и прямой ВС; найдём точку F пересечения прямой, проходящей через точку А параллельно CD, и прямой QE. Принадлежность точки F коническому сечению, проходящему через точки А, В, С, D, Е, следует из теоремы Паскаля [2]; это можно доказать и с помощью метода координат.

 Прямая, проходящая через середины хорд AF и CD – диаметр конического сечения. Аналогично постоим второй диаметр; если эти два диаметра параллельны – это парабола; если пересекаются – это эллипс или гипербола, а точка пересечения – их центр.

#  П.2.Построение оси, вершины, фокуса и директрисы параболы

 Из нескольких равносильных определений параболы здесь принято такое, которое в наибольшей степени соответствует используемым методам: параболой называется линия, которая в некоторой прямоугольной системе координат является графиком функции у=*a*\*x2.

 Для построения оси параболы выберем систему координат такую, что её начало совпадает с одной из заданных точек, а ось ординат параллельна оси параболы. Уравнение параболы в этой системе координат имеет вид y = *a*\*х2 + b\*х. Коэффициенты *a* и b находятся по координатам двух заданных точек (обозначим их А (х1,у1) и В (х2,у2); на рисунке они расположены по разные стороны от оси ординат ):

 *a* = $\frac{Y1\*X2-Y2\*X1}{X1\*X2\*(X1-X2)}$ , b = $\frac{Y1\*X2²-Y2\*X1²}{ X1\*X2\*\left(X1-X2\right)}$ .

******

X

Y

B

C

A

O

A ‘ Э”´

 Точка А´ , симметричная точке А относительно оси параболы, имеет абсциссу Х1´ = - Х1 - $\frac{b}{a}$ = $\frac{Y1\*X2\*(X2- X1)}{Y1\*X2-Y2\*X1}$ = $\frac{Y1\*X2}{Y3}$, где у3 - точка пересечения хорды АВ и оси ординат. ПрямаяY = $\frac{Y3}{X2}$\*Х пересекается с прямой Y= Y1в точке А ´. Прямая, проходящая через середину хорды АА´ параллельно оси ординат - ось параболы.

 Для построения вершины параболы выберем систему координат так, чтобы ось ординат совпадала с осью параболы, а начало координат находилось в точке пересечения оси ординат и прямой, проходящей через две заданные точки, лежащие по одну сторону от оси ординат (на рисунке это точки А и В).

******

Y

X2

В

А

Y1

X1

X1+X2

X

 В этой системе координат уравнение параболы имеет вид y =$\frac{х²}{a}$ + b . Коэффициенты *a* и b находятся по координатам точек А и В:

 *a* = $\frac{X1\*(X2+X1)}{Y1 }$ , b = $\frac{X2+X1}{ Y1\*X2}$ .

 Величина b – это ордината вершины параболы. Её построение следует из соотношения$\frac{b}{X2}$ = $\frac{Y1}{ X2+X1}$ : отметим на оси абсцисс точку с абсциссой Х1+Х2, на оси ординат точку с ординатой Y1, проведём через них прямую; параллельная ей прямая, проходящая через точку ( Х2 ; 0 ), пересекает ось ординат в вершине.

Построение отрезка *а* следует из соотношения $\frac{a}{X1}$ = $\frac{X2}{b}$ и может быть выполнено на основе теоремы Фалеса. Отложив четвертую часть этого отрезка на оси ординат от вершины параболы в обе стороны, получим фокус и точку пересечения директрисы с осью ординат.

# П.4. Построение осей, вершин, фокусов и директрис эллипса и гиперболы

Эллипсом (гиперболой) здесь называется линия, уравнение

которой в некоторой прямоугольной системе координат есть $\frac{ x²}{a²}$ + $\frac{ y²}{b²}$ = 0 ($\frac{ x²}{a²}$ -$ \frac{ y²}{b²}$ =1).

 Выберем систему координат с началом в точке пересечения диаметров, построенной в п.1.В этой системе координат уравнение конического сечения имеет вид p\*x2+q\*xу+r\*у2=1. Коэффициенты p, q, r определяются по координатам трёх заданных точек из системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}p\*х1²+q\*х1у1+r\*у1² \\p\*х2²+q\*х2у2+r\*у2²\\p\*х3²+q\*х3у3+r\*у3² \end{array}\right.$$

p = [x1y1\*(y22 – y32) + x2y2\*(y32 – y12) + x3y3\*(y12 – y22)]/D,

q = [x12\*(y32 – y22) + x22\*(y12 – y32) + x32\*(y22 – y12)]/D,

r = [x1y1\*(x32 – x22) + x2y2\*(x12 – x32) + x3y3\*(x22 – x12)]/D,

где D=(x2y3 – x3y2) (x1y3 – x3y1) (x1y2 – x2y1).Поворот системы координат на угол f , определяемый из соотношения

tg2f = $\frac{х1²\*( х1²– х1²) + х1²\*(х1² – х1²) + х1²\*(х1²– х1²)}{х1²х1²\*(х1²– х1²– х1²– х1²) + х1²х1²\*(х1² – х1²– х1²– х1²) +х1²х1²\*(–х1² – х1²– х1²– х1²)}$ ,

обращает в ноль коэффициент q. Заметим, что tg2f выражается через координаты точек , значит , угол 2f можно построить циркулем и линейкой как угол в прямоугольном треугольнике с соответствующими катетами. Направление поворота можно определить, повернув сначала систему координат в произвольную сторону и найдя коэффициент q по новым координатам точек; если q ≠ 0, повернуть в другую сторону.

 В новой системе координат уравнения конического сечения имеет вид m\*x2+n\*y2=1.Тот квадрант, где находятся две из пяти заданных точек, будем считать первым; координаты левой точки обозначим (x1,y1), правой – (x2,y2).Коэффициенты m и n определяются по координатам этих точек из системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{c}m\*х1²+n\*y1²=1\\m\*х2²+n\*y2²=1\end{array}\right.$$

m = (y12 – y22)/(x22y12 – x12y22 ) , n = (x22 – x12)/(x22y12 – x12y22 ).

 Если y1>y2 , то m>0, n>0.Мы можем построить отрезки $\frac{1}{\sqrt{m}}$ и $\frac{1}{\sqrt{n}}$; отложим первый из них от начала координат в обе стороны на одной оси; второй отложим на другой оси. Ту ось, где отложен больший отрезок, будем считать осью абсцисс. Длину большего отрезка обозначим *a*, меньшего – b. В этом случае коническое сечение – эллипс, координаты его вершин (±*a* ,0), (0, ±b), фокусов ( ±$\sqrt{ a²-b²}$ ,0), уравнение директрис х=±*а*2/$\sqrt{ a²-b²}$.

 Если у1<у2 и прямая, проходящая через точки (х1,у1) и (х2,у2), пересекает ось ординат при у <0(то есть х2 у1 – х1 у2 <0), то m>0, n<0; иначе переобозначим оси. Мы можем построить отрезки *а*=$\frac{1}{\sqrt{m}}$ и *b*=$\frac{1}{\sqrt{-n}}$; отложив первый из них в обе стороны от начала координат на оси абсцисс, получим вершины гиперболы; координаты её фокусов (±$\sqrt{ a²+b²}$,0), уравнения директрис х=±*а*2/$\sqrt{ a²+b²}$.

Литература

1. И.Ньютон. Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе. Издательство Академии Наук СССР, 1948.
2. А.В.Акопян, А.А.Заславский. Геометрические свойства кривых второго порядка. М.: МЦНМО, 2011.
3. В.В. Прасолов.Задачи по планиметрии. М.:МЦНМО, 2007.