Секция: Математика

**Выполнение геометрических построений с помощью треугольника-шаблона**

Новицкий Василий Геннадьевич, 11 класс

МБОУ «Физико-математический лицей» г. Сергиев Посад

Забавин Валерий Николаевич, 12 ЦНИИ МО РФ, начальник лаборатории, д.ф.-м.н.

# Введение

Интеллектуальную игру «геометрия» предложил Фалес Милетский - сначала грекам, а со временем она распространилась по всему миру. Правила этой игры, впервые сформулированные Евклидом в виде постулатов и аксиом, совершенствовались тысячелетиями и окончательно сложились к началу XXвека.

Циркуль и линейка – инструменты для реализации правил геометрии на плоскости. Однако проводились эксперименты как с этими, так и с другими (специально сконструированными) инструментами либо для того, чтобы решить задачи, которые не решаются с помощью циркуля и линейки, либо для того, чтобы уменьшить количество инструментов (решение задач минимальными средствами всегда считалось признаком совершенства). Укажем наиболее известные инструменты:

- единственный циркуль (Мор и Маскерони);

- линейка и циркуль постоянного раствора (Мохаммед Абу-ль-Вефа);

- циркуль и линейка с нанесенными на неё двумя метками;

- линейка и вспомогательная фигура (например, вспомогательная окружность Штейнера);

**-** двусторонняя линейка (линейка с двумя параллельными краями);

- острый или прямой угол;

- пара угольников;

- изгибы бумаги (оригами).

Список инструментов составлен по материалам книг и статей [1-4, 6].

**Цель работы** – выяснить, какие геометрические построения выполняются с помощью единственного треугольника-шаблона. Поставленная цель достигается решением следующих задач:

1) сформулировать естественные правила работы с треугольником-шаблоном;

2) выполнить необходимые вспомогательные построения.

 При решении этих задач используются теоретические методы исследования, не выходящие за рамки школьного курса планиметрии.

# 1. Правила построений

Сформулируем правила работы с треугольником-шаблоном.

Естественно, треугольником-шаблоном нельзя построить окружность, поэтому будем считать её заданной, если дано положение её центра и положение точки, принадлежащей окружности, или отрезок, равный её радиусу. Прямую будем считать заданной только в том случае, если даны две точки, принадлежащие этой прямой, расстояние между которыми не превышает длины стороны треугольника-шаблона.

Формулировать правила и выполнять построения будем по схеме, изложенной в книге [5].

Разрешается:

1) соединить две точки, расстояние между которыми не превышает длины стороны треугольника;

2) если даны прямая и точка, находящаяся от неё на расстоянии не более длины высоты треугольника (в том числе – на данной прямой), расположить треугольник так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а точка принадлежала другой стороне треугольника или совпадала с его вершиной;

A

*l*

M

***Рис.1***

3) если возможно, расположить треугольник так, чтобы одна его вершины совпадала с данной точкой, а другая лежала на данной прямой (см. рис. 1).

В тексте будем ссылаться на эти правила так: П1, П2, П3.Для определенности обозначим длину самой длинной стороны (можно выбрать и другую сторону) треугольника-шаблона *е*, а высоту к этой стороне - *h*. В дальнейшем, если это не оговаривается, всякий треугольник есть треугольник-шаблон, под стороной треугольника будем подразумевать длину самой длинной стороны треугольника-шаблона, а под высотой треугольника – высоту к этой стороне.

Необходимо подчеркнуть следующие обстоятельства:

1) здесь обсуждается принципиальная возможность построений, но не их точность и сложность (эти вопросы рассмотрены в книге [1]);

2) построения с треугольником-шаблоном отличаются от построений с углом, потому что угол имеет бесконечные размеры. С помощью треугольника-шаблона нельзя, например, провести прямую через две точки, расстояние между которыми больше длина стороны треугольника, не выполнив предварительно некоторых построений;

3) действие с линейкой состоит в том, что край линейки совмещается с двумя данными точками на плоскости; действие с циркулем состоит в том, что ножки циркуля совмещаются с двумя данными точками на плоскости. В обоих случаях в построении участвуют два объекта (точки), заданных на плоскости. Тем же свойством обладают и построения П1, П2, П3 – с той разницей, что одним из двух объектов может быть не точка, а прямая. Этим построения П1, П2, П3 отличаются от действий с углами, когда в построении участвуют три объекта, как в книге [1] – угол можно расположить так, что его стороны проходят через две данные точки, а вершина лежит на данной прямой. По этой причине мы считаем построения П1, П2, П3«естественными».

4) в списке разрешенных построений отсутствует построение с использованием двух данных прямых, которое можно сформулировать так: разрешается расположить треугольник так, чтобы его сторона лежала на данной прямой, а противоположная вершина – на другой данной прямой (не параллельной первой). Это построение выполняется с помощью построения Т1.

# 2. Вспомогательные построения

Из книги [6] следует, что все построения, выполняемые с помощью циркуля и линейки, сводятся к решению следующих задач:

1) построение прямой, проходящей через две данные точки;

2) построение точки пересечения двух прямых;

3) построение точки пересечения прямой и окружности;

4) построение точки пересечения двух окружностей.

Задачи, где требуется построить окружность, не могут быть решены при отсутствии циркуля. Однако ясно, что окружность строится для того, чтобы найти точки ее пересечения с ранее построенными фигурами, а это обеспечивается решением задач 3 и 4, если окружность задана центром и радиусом.

Выполним необходимые для решения задач вспомогательные построения, подчиняясь сформулированным правилам. Доказательства не приводим, так как они содержатся в школьном курсе планиметрии.

## 2.1. Построение прямой, параллельной данной

Пусть даны прямая *a*и точка A. Рассмотрим случай, когда точка Aнаходится от прямой *a*на расстоянии, которое меньше *h*. Тогда сначала построим треугольник CDEтак, что точка А принадлежит отрезку СE, а точки D и E – прямой *а* (П2). Затем построим треугольник AFK так, что точка Е принадлежит отрезку AF (П2), как показано на рисунке 2. Прямая AK параллельна прямой *а* (П1).

C

D

E

A

K

F

*a*

***Рис.2***

Рассмотрим случай, когда точка Aнаходится от прямой *a*на расстоянии *h*. Построим треугольник АВС так, что точки В и С лежат на прямой *а* (П2). Построим треугольник АСD так, что точки B и D не совпадают. Прямая АD параллельна прямой *а*.

Наконец, рассмотрим случай, когда точка А находится от прямой *а* на расстоянии, превышающем *h*. Сначала необходимо построить несколько прямых, параллельных прямой *а* и находящихся на расстоянии *h* друг от друга, считая данную прямую, до тех пор, пока расстояние от данной точки до одной из прямых не будет меньше или равно *h*. Затем через точку А нужно построить прямую *l*, параллельную ближайшей прямой. Прямая *l* параллельна прямой *а*.

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т1.

## 2.2. Построение прямой, перпендикулярной данной

Пусть даны прямая АВ и точка С. Построим несколько прямых на расстоянии *h* (длина высоты треугольника) друг от друга, параллельных АВ (Т1), так, чтобы точка С оказалась между двумя из них. Расстояние от точки С до одной из них не больше 0,5*h*– но мы не можем знать, до какой. Если точка С не лежит ни на одной из них, выберем любую и обозначим MN. Построим треугольники EFK и PLQ так, что точка С лежит на сторонах FK и PL, а точки E, K, L, Q лежат на прямой MN (см. рис. 3) (П2). Построим треугольники EF`K и P`LQ, симметричные треугольникам EFK и PLQ относительно прямойMN. Прямые KF` и LP` пересекаются в точке О. Построим прямую СО (П1), она перпендикулярна прямой MN, а значит, перпендикулярна прямой AB. Если отрезок СО>*e*, возьмем другую прямую и повторим описанные выше построения.

M

Q

F

P

P`

F`

K

L

E

***Рис.3***

C

O

N

Если точка С лежит на одной из построенных прямых, возьмем произвольную точку между ней и соседней прямой. Построим прямую, проходящую через это точку, параллельную данной (Т1). Задача сводится к разобранному случаю.

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т2.

## 2.3. Построение середины отрезка.

Пусть дан отрезок. Из его концов проведем два луча под равными углами к отрезку по одну сторону от него (П2). Эти лучи пересекутся в точке. Из этой точки проведем перпендикуляр на данный отрезок (Т2). Основание перпендикуляра – искомая середина.

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т3.

## 2.4. Построение прямой, проходящей через две данные точки

Если расстояние между точками не превышает *е*, то, выполнив П1, мы построим прямую. Сложнее построить прямую, проходящую через две точки, расстояние между которыми больше длины стороны треугольника. Пусть даны точки А и В. Требуется построить отрезок АВ.

Из точки А проведем произвольную прямую, из точки В опустим на неё перпендикуляр ВС (Т2). Из точки В проведём прямую, параллельную АС (Т1), из точки А опустим на неё перпендикуляр AD (Т2). Из середины С1 отрезка АС (Т3) опустим перпендикуляр на отрезок BD (Т2). Из середины D1 отрезка АD (Т3) опустим перпендикуляр на отрезок BC (Т2). Точка пересечения этих перпендикуляров В1лежит на отрезке АВ. Если АВ1>*e*, повторим построения для прямоугольника АD1В1С1, найдём точку В2 – его центр – и так далее до тех пор, пока не получится отрезок АВn≤*е*. Построим отрезок АВn и прямую АВ (П1).

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т4.

## 2.5. Построение отрезка, равного данному

Пусть даны прямая *a*и отрезок АВ, а также точка Х, лежащая на прямой *а*. Необходимо построить отрезок XY, равный отрезку АВ и лежащий на прямой *a*.

а) Пусть отрезок АВ не лежит на прямой *а* и параллелен ей. Проведём через точки А и Х прямую (Т4), через точку В – прямую, параллельную АХ (Т1). Точка пересечения этой прямой с прямой*а* есть искомая точка Y. Если отрезок XY надо отложить от точки Х в другую сторону – повторим построения, поменяв роли точек А и В.

б) Рассмотрим случай, когда отрезок АВ не лежит на прямой *а* и не параллелен ей. Построим прямую АК, параллельную прямой *а* (Т1). Построим точки М и N такие, что отрезки АМ и АN равны *е*, точка М принадлежит прямой АВ, а N – прямой АК. Через точку В проведем прямую, параллельную прямой MN (Т1). Она пересекает прямуюAKв точке С. Отрезки АС и АВ равны по теореме Фалеса. Отрезок АС параллелен прямой *а*, то есть задача сведена к пункту а).

в) Если отрезок АВ лежит на прямой *а*, построим произвольную прямую, ей параллельную, и построим на ней отрезок, равный АВ, как в пункте а). После этого задача сводится к пункту а).

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т5.

## 2.6. Построение пропорциональных отрезков

Пусть даны отрезки *a*, *b* и *с*. Нужно построить отрезок $ x=\frac{ab}{c}$ . Построим произвольный острый угол с вершиной в точке О. На одной стороне угла построим отрезки ОА=*а* и ОС=*с*, на другой – отрезок ОВ=*b* (Т5). Через точки В и С проведем прямую (Т4), через точку А – её параллельную (Т1) до пересечения с лучом OВ в точке X. Отрезок ОХ=*x* – искомый.

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т6.

## 2.7. Построение треугольника по катету и гипотенузе

Пусть даны отрезки $a$и $c$. Необходимо построить треугольник, так что его катет был равен отрезку $a$, а гипотенуза – отрезку $c$.

Построим прямой угол с вершиной $O$(Т2). На одной из его сторон откладываем отрезки $OA=a$и $OA\_{1}=\frac{a}{c}e$(Т5 и Т6). Расположим треугольник-шаблон так, чтобы одна его вершина совпадала с точкой $A$, а другая лежала на стороне прямого угла, отличной от той, где отложены отрезки $OA$ и $OA\_{1}$(П3); полученную точку обозначим $B\_{1}$. Через точку $A$ проведем прямую, параллельную $A\_{1}B\_{1}$(Т1); она пересекает прямую $OB\_{1}$ в точке $B$. Треугольник $ΔOAB$ – искомый: $∠AOB=90°$, $OA=a$, $AB=c$.

Из этого построения следует способ построения отрезка, равного $\sqrt{ab}$, если даны отрезки $a$ и $b$. Искомый отрезок равен катету треугольника с гипотенузой$\frac{1}{2}(a+b)$и другим катетом $\frac{1}{2}\left|a-b\right|$.

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т7.

## 2.8. Построение треугольника по трем сторонам

Пусть даны отрезки $a$,$b$,$c$. Нужно построить треугольник со сторонами, равными этим отрезкам.

Из формулы Герона следует, что

$h\_{a}=2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}/a$, где $p$–полупериметр, $h\_{a}$ – высота, опущенная на сторону $a$. С использованием Т5 построим отрезки $p$, $p-a$, $p-b$, $p-c$; затем построим отрезки$\sqrt{p(p-a)}$, $\sqrt{(p-b)(p-c)}$ (Т5) и $^{a}/\_{2}$ (Т3). С помощью Т6построим отрезок

$$h\_{a}=\frac{\sqrt{p(p-a)}\sqrt{(p-b)(p-c)}}{{a}/{2}}$$

Задача сведена к построению треугольника с катетом $h\_{a}$ и гипотенузой $b$ или $c$, то есть к построению Т7.

В дальнейшем будем ссылаться на это построение, как на Т8.

# 3. Выполнение геометрических построений

Таким образом, задачи 1 и 2 решаются построением Т4.

Задача 3 решается построением прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной радиусу данной окружности, и катетом, равным расстоянию от центра окружности до данной прямой (Т7). Этот треугольник располагается так, чтобы его вершина, из которой выходят известные катет и гипотенуза, совпадала с центром окружности, а известный катет был перпендикулярен данной прямой. Тогда вершина другого острого угла – одна из искомых точек; вторая симметрична ей относительно известного катета. Вопрос о существовании точек пересечения выясняется в процессе построения (можно также заранее сравнить длины катета и гипотенузы).

Задача 4 решается построением треугольника по трем сторонам – двух радиусам данных окружностей и расстоянию между их центрами (Т8). Расположение треугольника очевидно. Вершина, лежащая против стороны, равной расстоянию между центрами окружностей – одна из искомых точек; вторая симметрична ей относительно прямой, проходящей через центры данных окружностей. Вопрос о существовании точек пересечении выясняется в процессе построения (можно также воспользоваться неравенством треугольника и заранее сравнить длины двух радиусов данных окружностей и расстояния между их центрами).

Полученные результаты доказывают, что:

Все геометрические построения, выполняемые с помощью циркуля и линейки, выполняются с помощью единственного треугольника-шаблона.

Верно и обратное утверждение: все геометрические построения, выполняемые с помощью единственного треугольника-шаблона, выполняются с помощью циркуля и линейки. Для доказательства достаточно показать, что построения, разрешенные правилами П1, П2, П3, выполнимы с помощью циркуля и линейки.

Правило П1 выполняется единственной линейкой.

Для выполнения правила П2 надо построить угол, равный данному (одному из углов треугольника-шаблона), так, чтобы одна его сторона лежала на данной прямой, а другая проходила через данную точку. Это построение выполняется с помощью циркуля и линейки. Действительно, можно построить угол, равный данному, одна сторона которого лежит на данной прямой, а вершина находится в произвольной точке; затем провести прямую, параллельную другой стороне построенного угла через данную точку.

Выполнение правила П3сводится к построению отрезка, равного данному (равного одной из сторон треугольника-шаблона), так, чтобы один его конец совпадал с данной точкой, а другой – лежал на данной прямой.

Таким образом, доказано, что множество построений, выполняемых циркулем и линейкой, совпадает с множеством построений, выполняемых с помощью единственного треугольника-шаблона (при условии, что для треугольника разрешены те и только те построения, которые сформулированы в правилахП1, П2, П3).

# Список литературы

1. Адлер А. Теория геометрических построений. – Ленинград: Государственное учебно-педагогическое издательство наркомпроса РСФСР, 1940.
2. Александров И.И. Сборник геометрических задач на построение (с решениями) / Под ред. Н.В. Наумович. Изд. 19-е. – М. :Едиториал УРСС, 2004.
3. Петрунин А. Оригами и построения // Квант. – 2008. − №1. – с.38-40.
4. Филипповский Г. Абу-л-Вафа и циркуль постоянного раствора // Квант. – 2009. − №1. – с.36-37.
5. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи. – М. : Просвещение, 1984.
6. Энциклопедия для детей. Т. 11. Математика / Ред. коллегия: М. Аксёнова, В. Володин и др. – М. :Аванта+, 2005.