**Гудыма Д.А., Склонин И.А.**

МБОУ

"Физико-математический лицей"

г. Сергиев Посад, Московская обл.

**Принцип Дирихле в комбинаторной геометрии**

В работе получена оценка максимального количества точек, которые можно разместить в заданном квадрате так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было больше заданного числа.

**Ключевые слова:** комбинаторная геометрия; непрерывный принцип Дирихле.

**Dirichlet principle in combinatorial geometry**

An estimate of the maximum number of points, that can be placed in a given square, so that the distance between any two of them were more than a given number.

**Keywords:** combinatory geometry; persistent Dirichlet’s principles.

Комбинаторная геометрия изучает геометрические задачи на максимум и минимум, связанные с нахождением наилучших в каком-нибудь смысле расположений конечных систем точек или геометрических фигур. Решения этих задач носят в значительной степени комбинаторный характер и направлены на отыскание некоторых целых чисел, например, чисел, указывающих количество рассматриваемых точек или фигур. Типичным примером задачи комбинаторной геометрии может служить задача плотнейшей укладки равных кругов в некоторой части плоскости с обобщением на многомерное пространство.

Возникновение комбинаторной геометрии связано с большим значением, которое приобрели в современной науке и технике те области математики, которые ставят своей целью отыскание оптимальных режимов работы определённых механизмов или больших систем. Этот круг вопросов привёл к появлению ряда самостоятельных научных направлений (теория игр, теория информации, теория кодирования, оптимальное управление и многие другие). В некоторых из них непосредственно используется комбинаторная геометрия.

При решении задач комбинаторной геометрии применяются методы из разных областей математики. Среди них важное значение имеют методы, основанные на принципе Дирихле.

Изложенное выше обосновывает актуальность выбранной темы.

Одна из задач, обсуждаемых в комбинаторной геометрии – каково максимальное количество точек, которые можно разместить в заданной области так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было больше заданного числа.

Цель работы – получить оценку этого количества для квадрата.

Используются теоретические методы исследования, основанные на школьных курсах алгебры и планиметрии, а также на курсе математического анализа.

Книг и статей, посвященных комбинаторной геометрии, десятки и сотни. При работе над данной темой использовались книги [1-8]. В первой из них [1] коротко изложены история и причина возникновения комбинаторной геометрии и рассмотрены некоторые задачи, которые позволяют понять предмет комбинаторной геометрии. Книги [2-5] - это сборники задач, в которых найдены примеры применения принципа Дирихле. В книге [5] найден оптимальный способ разбиения квадрата. Книги [6-8] использовались при доказательстве некоторых неравенств.

Непрерывный принцип Дирихле формулируется так [3]:

Если фигуры F1, F2,…Fm с площадями S1, S2, …,Sm содержатся в фигуре F с площадью S и S1+S2+…+Sm>S, то некоторые две из фигур имеют общую точку.

В качестве этих фигур выбраны выпуклые многоугольники, на которые можно разрезать квадрат с расположенными в нем несколькими непересекающимися кругами так, чтобы каждый многоугольник содержал ровно один круг. Доказательство того, что квадрат можно так разрезать, приведено в книге [5].

Схема доказательства: для центра каждой окружности рассмотрим все точки, удалённые от этого центра не дальше, чем от любого другого центра; Это множество точек – пересечение выпуклых множеств (полуплоскостей), значит, выпуклый многоугольник.

Докажем, что площадь каждого многоугольника не меньше площади правильного описанного шестиугольника.

Обозначим радиус кругов через R. Рассмотрим круг с центром в точке О и N-угольник A1,A2,…AN, в котором этот круг содержится.

O2

O1

A1

B2

A2

O3

B1

B3

An

O

Если N=3,4,5,6, то площадь N-угольника не меньше площади описанного N- угольника со сторонами, параллельными сторонам данного N-угольника  площади правильного описанного N-угольника

 площади правильного описанного шестиугольника, которая равна 2.

Если N7, поступим иначе.

Этот N-угольник составлен из треугольников OA1A2, ОA2A3,…, ОAN-1AN, ОANA1, поэтому его площадь

S=A1A2\*OB2+A2A3\*OB3+…+ANA1\*OB1A1A2\*R+A2A3\*R+…+

+ANA1\*R=R(A1A2+A2A3+…+ANA1)>R(B1B2+B2B3+…+BNB1)=

=R(O1O2+O2O3+…+ONO1)R(2R+2R+…+2R)=NR2R2>2**.**

Приведённая цепочка неравенств справедлива, если ни одна из сторон N-угольника не лежит на стороне квадрата. Если лежит - надо рассмотреть квадрат, симметричный относительно этой стороны. Неравенства остаются справедливыми и в этом случае.

Теперь мы можем доказать Теорему 1:

Если в квадрате со стороной a находится больше, чем  точек, то какие-то две точки расположены на расстоянии, не большем 2R.

Доказательство.

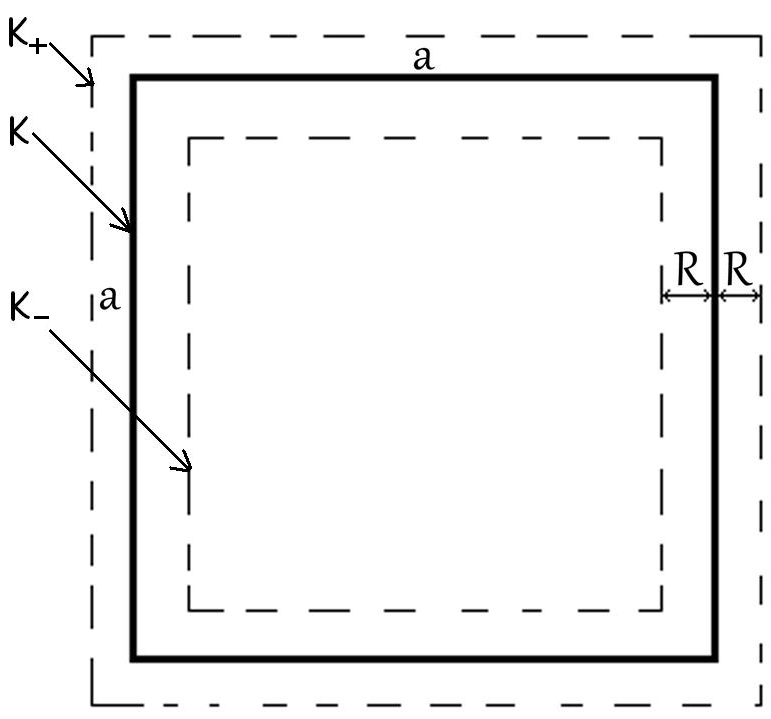
Предположим противное, то есть, что расстояние между любыми двумя точками больше 2R. Тогда круги радиуса R с центрами в этих точках не пересекаются. Части этих кругов лежат за пределами квадрата, поэтому добавим к нему по периметру полосу шириной R. Получится квадрат со стороной a+2R – фигура F. Его можно разрезать на многоугольники - фигуры F1, F2,…Fm содержащие ровно по одному кругу. Площадь каждого многоугольника не меньше 2, суммарная площадь всех многоугольников больше \*2=(a+2R)2 – площади фигуры F. Значит, какие-то многоугольники имеют общую точку. Получено противоречие.

Теорема доказана.

Из Теоремы 1 следует, что максимальное количество точек, которое можно разместить в квадрате со стороной a так, чтобы расстояние между любыми двумя из них было больше 2R, не превосходит .

Доказанную в Теореме 1 оценку можно улучшить.

Дальше мы будем использовать такие обозначения: К - данный квадрат со стороной а; К**+** - квадрат, который получается, если к данному квадрату по периметру добавить полосу шириной R; К- - квадрат, который получается, если от данного квадрата по периметру отрезать полосу шириной R.



Многоугольники F1, F2,…, Fm, полученные описанным выше способом, будем называть областями Вороного с указанием, если нужно, точки-центра круга, который в этом многоугольнике содержится (до середины 20 века эти многоугольники назывались областями Дирихле).

Выше при оценке площади области Вороного считалось, что ни одна из ее сторон не лежит на стороне квадрата К**+**. Теперь рассмотрим именно такие – граничные – области Вороного, у которых какие-то стороны лежат на сторонах квадрата К**+**. Будем считать, что ровно одна сторона граничной области Вороного лежит на стороне квадрата К**+**. Иначе отразим квадрат К**+** относительно тех его сторон, которые содержат вторую, третью, четвертую сторону области Вороного. Достаточное условие того, что сторона области Вороного принадлежит стороне квадрата К**+**, рассмотрено в лемме 1 в Приложении.

Если область Вороного – треугольник или четырехугольник, то ее площадь не меньше 3R2 или 4R2. Докажем, что если число сторон граничной области Вороного больше четырёх, то ее площадь не меньше (2+) R2 .

Рассмотрим (N+1) - угольную область Вороного, одна сторона которого лежит на стороне квадрата К**+**.

O2

O N-1

B2

B N-1

A2

A N

B1

O

O1

B N

O N

A N+1

A1

На рисунке эта область – (N+1) – угольник А1А2…АNAN+1, сторона А1AN+1 лежит на стороне квадрата К**+**. Площадь этого (N+1) – угольника

S=S(OA1A2)+S(OA2A3)+…+S(OANAN+1)+S(OA1AN+1)= =(OB1\*A1A2+OB2\*A2A3+…+OBN-1\*AN-1AN+OBN\*ANAN+1)+S(OA1AN+1)=

=[OB1\*(A1B1+B1A2)+OB2\*(A2B2+B2A3)+…+OBN-1\*(AN-1BN-1+BN-1AN)+ +OBN\*(ANBN+BNAN+1)]+S(OA1AN+1)

[OB1\*A1B1+R(B1A2+A2B2+B2A3+…+AN-1BN-1+BN-1AN+ANBN)]+ +OBN\*BNAN+1+S(OA1AN+1)>

>S(OA1B1)+R(B1B2+B2B3+…+BN-1BN)+S(OAN+1BN)+S(OA1AN+1)=

=R(O1O2+O2O3+…+ON-1ON)+S(A1B1OBNAN+1)

(N-1)R2+S(A1B1OBNAN+1).

Оценка для площади многоугольника A1B1OBNAN+1 следует из леммы 2, которая приводится в Приложении: S(A1B1OBNAN+1). Поэтому SR2(N-1+2). Для N5 S(2+)R2. Случай N=4 рассматривается в лемме 3 в Приложении.

Таким образом, доказано, что площадь граничной области Вороного не меньше, чем (2+)R2. Эта оценка – точная, равенство достигается, если область Вороного – пятиугольник, составленный из половины описанного квадрата и половины описанного шестиугольника.

Поскольку минимум площади граничной области Вороного больше, чем минимум площади внутренней области Вороного, а граничные области существуют, можно улучшить оценку, полученную в Теореме 1.

Теорема 2.

Пусть в квадрате К со стороной a находится k точек. Если

k>+4(2-)(+1), то какие-то две точки расположены на расстоянии, не большем 2R.

Доказательство.

Предположим противное, то есть, что расстояние между любыми двумя точками больше 2R. Тогда круги радиусом R с центрами в этих точках не пересекаются. Значит, квадрат К**+** можно разрезать на многоугольники – области Вороного, содержащие ровно по одному кругу. Пусть вне квадрата К- находится k0 точек, тогда в квадрате К- – k-k0 точек. Из предположения и из Теоремы 1 следует, что k-k0≤, то есть k0≥k->4(2-)(+1). Суммарная площадь областей Вороного этих точек не меньше, чем

(2+)R2\*k0+2R2\*(k-k0)=2R2\*k+(2-)R2\*k0>

>2R2[+4(2-)(+1)]+(2-)R2\*4(2-)(+1)=

=a2+4aR+4R2=(a+2R)2 – площадь квадрата К**+**. Полученное противоречие доказывает теорему.

Возникает вопрос, можно ли улучшить и эту оценку?

Из Теорем 1 и 2 следует, что с увеличением стороны квадрата относительная роль второго слагаемого в оценке уменьшается. Казалось бы, из копий данного квадрата К с данными точками можно составить квадрат со стороной na и применить к нему Теорему 1. Для этого пришлось бы выбросить точки, находящиеся вне квадрата К-. Ясно, что чем меньше этих точек, тем лучше получается оценка.

С другой стороны, из анализа доказательства Теоремы 2 следует, что чем больше этих точек, тем лучше получается оценка.

Эти обстоятельства используются при доказательстве Теоремы 3:

Пусть в квадрате К со стороной a находится k точек. Если k>++3-, то какие-то две точки расположены на расстоянии, не большем 2R.

Доказательство.

Предположим противное, то есть, что расстояние между любыми двумя точками больше 2R. Тогда круги радиуса R с центрами в этих точках не пересекаются. Значит, квадрат К**+**можно разрезать на многоугольники-области Вороного, содержащие ровно по одному кругу.

Пусть вне квадрата К- находятся k0≥ 2(+1-) точек, тогда в квадрате

К- - k-k0 точек. Суммарная площадь областей Вороного этих точек не меньше, чем (2+)R2\*k0+2R2\*(k-k0)=2R2\*k+(2-)R2\*k0>

>2R2(++3-)+(2-)R2\*2(+1-)=(a+2R)2 – площадь квадрата К**+**. Получено противоречие.

Пусть вне квадрата К-  находится k0 <2(+1-) точек. Составим из копий квадрата К квадрат со стороной an (обозначим его Кn ; n, для определённости, чётное) по следующему правилу: первый квадрат в строке - данный К; к нему справа примыкает второй, симметричный первому относительно его правой стороны; третий симметричен второму относительно его правой стороны и так далее до n-ого квадрата; полученная строка квадратов симметрично отражается относительно её нижней стороны и так далее до n-ой строки; из квадратов К, расположенных в шахматном порядке, выбросим точки, находящиеся вне квадратов К-. Из остальных квадратов выбросим точки, находящиеся на расстоянии от вершины квадрата не большем, чем R. В каждом квадрате не больше четырёх таких точек.

В составленном квадрате Кn расстояние между любыми двумя точками больше 2R. Этих точек не меньше, чем . Из Теоремы 1 следует, что  , то есть

k<.

Если  , то k<[]+1, значит,

k≤[], что противоречит условию. Теорема доказана.

**Приложение**

Лемма 1.

Если расстояние от точки до стороны квадрата К**+** меньше 2R, то одна из сторон области Вороного этой точки принадлежит этой стороне.

Доказательство.

Введем систему координат: ось абсцисс направлена вдоль стороны квадрата К**+**, ось ординат направлена внутрь квадрата, начало координат О – проекция данной точки О1 на ось абсцисс.

y

O1 (0; у1),

M (;)

O2 (х2;у2).

P

x

0

Рассмотрим точку О2, чья область Вороного граничит с областью Вороного точки О1 (для определенности – точка О2 лежит справа от точки О1). Пусть координаты точки О1 – (0; у1), точки О2 – (х2;у2). Уравнение прямой, проходящей через точки О1 и О2: у=у1+х\*. Координаты середины отрезка О1О2 (точки М): (;). Уравнение прямой, проходящей через точку М перпендикулярно отрезку О1О2:

у=-x\*+.

Эта прямая содержит общий участок границы областей Вороного точек О1 и О2. Она пересекает ось абсцисс в точке Р с координатами (;0). Докажем, что точка Р лежит правее начала координат, то есть, что

>0 ⬄ >0.

Для координат точек О1 и О2 выполнены неравенства:

Rу1<2R, +(у2-у1)24R2, y2R.

Если у2у1, доказываемое неравенство очевидно.

Если у2<у1, получаем цепочку неравенств и равенств:

+4R2-(у2-у1)2=-2y12+2y1y2+4R2=

=2(+y1-y2)(-y1+y2).

Выражение в первой скобке, очевидно, положительно. Для выражения во второй скобке имеем:

-y1+y2-y1+R=2R-y1>0.

Неравенство доказано. Выполнение этого неравенства доказывает утверждение леммы, так как отрезок ОР - часть стороны области Вороного точки О1.

Лемма 2.

Площадь четырехугольника ОО1МР на рисунке к лемме 1 больше R2.

Доказательство.

Длины сторон О1М и МР:

О1М=,

МР=.

Площадь S четырехугольника ОО1МР равна сумме площадей треугольников О1МР и ОО1Р:

S=(О1М\*МР+ОО1\*ОР)=.

Обозначим L=О1М,  и преобразуем полученное выражение (учтём, что : S=.

Если cos0, то Sy1LR2>.

Если cos>0, докажем сначала, что S.

Действительно,

S-==

=[2y1-cos\*(L+R)] [2(R+2Lcos)-(L+R)cos]=

=[R(2-cos)+3Lcos]0.

Теперь докажем, что

S:

S- =

=y1-R(1+2cos)]\*[2R-cos(y1+R(1+2cos))].

Оценим выражение в первой скобке:

y1-R(1+2cos)=y2+2Lcos-R(1+2cos)=(y2-R)+2(L-R) cos0.

Оценим выражение во второй скобке:

2R-cos(y1+R(1+2cos))

2R-cos(2R+R(1+2cos))=R(1-2cos)(2+cos)>0

(так как cos=<=0,5).

Итак, S=.

Осталось доказать, что при ≤γ≤ функция

f(γ)=.

Убедимся, что она выпукла вверх на отрезке [;]. Отсюда будет следовать, что ее график лежит выше своей хорды между точками γ=, f()= и γ=, f()=1. Вычислим сначала первую, потом вторую производную:

=2cosγ+2cos2γ-2sin2γ+;

=-2sinγ-8sinγcosγ- <0.

Вторая производная отрицательна, значит, функция выпукла вверх. Таким образом, f(γ)≥. Лемма доказана.

Лемма 3.

Площадь пятиугольной граничной области Вороного не меньше (2+)R2.

Доказательство.

Если все стороны граничной области Вороного точки О, кроме стороны, лежащей на границе квадрата, сдвинуть параллельно себе до касания с кругом радиуса R с центром в точке О, получится многоугольник, площадь которого не больше площади области Вороного. Будем считать этот многоугольник пятиугольником, так как в ином случае доказательство уже выполнено.

α2

α2

α3

α1

α1

γ1

α3

γ2

β1

β2

Разобьем полученный пятиугольник на треугольники, обозначим углы, как показано на рисунке, обозначим расстояние от центра круга до стороны квадрата через h и вычислим площадь пятиугольника:

S=0,5h2(tgβ1+tgβ2)+0,5h2(tgγ1+tgγ2)+R2(tgα1+tgα2+tgα3).

Для величин, входящих в это выражение, выполняются следующие соотношения: все углы – острые; 2α1+2α2+2α3+β1+β2+γ1+γ2=2 π; R≤h<2R;

=; =; cos(β1+γ1)≤; cos(β2+ γ2)≤.

Тангенс – функция, выпуклая вниз на интервале [0;), поэтому

S≥ h2tg()+R2tg()+3R2tg().

Выражение справа зависит только от сумм β1+ β2, γ1+ γ2, α1+α2+α3, но не от каждого угла отдельно. Значит, можно положить

β1=β2=β; γ1=γ2=γ; α1=α2=α3=α.

Задача сводится к доказательству неравенства

h2+tgγ+3tgα≥2+

при следующих ограничениях: 6α+2β+2γ=2π; α,β,γ – острые углы;

; cos(β+γ)≤0,5(-1); 1≤<2. Исключив α= и =, получим следующую задачу: доказать неравенство

f(β ,γ)=3tg+tgγ+≥2+

при ограничениях 0<β≤γ<, β+3γ≥π. Последнее неравенство получилось при подстановке  в неравенство cos(β+γ)≤0,5(-1), неравенство β≤γ – при подстановке  в неравенство ≥1.

γ

β





0







Область, задаваемая ограничениями, показана на рисунке. Уравнения ее границ: левой – β=0, ≤γ≤; верхней – γ=, 0≤β≤; правой – γ=β, ≤β≤; нижней – γ=, 0 ≤β≤.

Итак, надо доказать, что в этой области f≥2+.

Дальше будем руководствоваться книгами [6], [7] и [8].

Вычислим и оценим частную производную от f по γ:

**=++=

=[sinsin]/[cos2(-)cos2γ]+>0

внутри рассматриваемой области (так как ≤≤; ≤≤). Это значит, что внутри области экстремумов нет.

На левой границе

f=3tg+tgγ;

=[sinsin]/[cos2cos2γ]>0,

то есть экстремумов нет.

На верхней границе функция f не определена, но неограниченно растет при приближении к ней изнутри области.

На правой границе

f=3tg+2tg*β*;

=+=[2sinsin]/[cos2cos2β]>0,

то есть экстремумов нет.

На нижней границе: f=3tg+tgγ-=3tg-2tgγ\*cos4γ.

Функция 3tg выпукла вниз, значит, ее график лежит выше касательной в точке γ=. Уравнение этой касательной: y=+(). Таким образом, 3tg≥+().

Докажем теперь, что функция -2tgγcos4γ выпукла вверх на отрезке [;]. Отсюда будет следовать, что ее график лежит выше своей хорды между точками γ=, -2tgcosπ=2 и γ=, -2tgcos=. Для доказательства найдем сначала первую, потом вторую производную:

(-2tgγcos4γ)=8tgγsin4γ-=-64cos4γ+80cos2γ-16-;

(-2tgγcos4γ)=(-64cos4γ+80cos2γ-16-)=

=4sinγcos3γ(64--)≤4sinγcos3γ(64-40\*2-8)<0 (так как cosγ≤).

Вторая производная отрицательна, значит, функция выпукла вверх.

Уравнение хорды:y=2-(2-). Таким образом,

-2tgγ\*cos4γ≥2-(2-).

Наконец,

f≥+()+2-(2-)=2++()(-)≥2+.

Лемма доказана.

**Используемая литература**

1. Яглом И.М. О комбинаторной геометрии. - М.,УРСС, 2004.

2. Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М., МЦНМО,2004.

3. Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М. Задачи по математике. Алгебра и анализ. Библиотечка «Квант». Вып.22. – М., Наука, 1982.

4. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М., Наука, 1974.

5. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). – М.,Физматлит, 2000.

6. Зельдович Я.Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. – М., Физматлит, 2010.

7. Зельдович Я.Б., Мышкис А.С. Элементы прикладной математики. – М., Наука, 1967.

8. В.Н.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка «Квант». Вып.56. – М., Наука, 1986.