Управление образования

Администрация Сергиево-Посадского района

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение

«Физико-математический лицей»

**Решение тригонометрических уравнений.**

**Способы выборки корней в тригонометрических уравнениях.**

Лекционно-семинарское занятие

 с использованием

мультимедийных средств обучения

9 класс

Учитель: Гавриленко Г.Ю.

2016-2017 учебный год

**Решение тригонометрических уравнений. Способы выборки корней в тригонометрических уравнениях.**

**Тема**: Решение тригонометрических уравнений. Способы выборки корней в тригонометрических уравнениях.

**Тип урока:** лекция - семинар.

**Вид урока:**урок формирования навыков и умений.

**Цели урока:**

* *Образовательные:*
1. Закрепить навыки решения тригонометрических уравнений.
2. Формировать навыки отбора корней различными способами.
3. Создать условия контроля (самоконтроля) усвоения знаний и умений.
* *Развивающая:*
1. Развивать психические свойства: память, внимание.

3. Развивать логическое мышление.

* *Воспитательные:*
1. Воспитывать культуру устной и письменной математической речи.
2. Воспитывать умение слушать друг друга и учителя.

Обучающие технологии:

* тестовая
* ИКТ
* развивающее обучение
* здоровьесберегающие

**Ход урока:**

1. ***Организационный момент***.
* Приветствие.

Сегодня мы с вами продолжим работу по теме: «Тригонометрические уравнения». Повторяем, обобщаем, приводим в систему полученные знания, учимся находить корни уравнений, удовлетворяющие данным условиям.Почти всегда решение тригонометрического уравнения сводится к простейшим, усложняясь дополнительными условиями по отбору корней, соответствующих начальным условиям, ОДЗ, условиям равносильных переходов.

Перед нами стоит задача –научиться решать тригонометрические уравнения с применением различных способов выборки корней.

1. ***Повторение пройденного материала.***
* ***Проверка домашнего задания:***

Приведите способ решения уравнения

1. $\sin(\left(\frac{π}{2}+x\right)=)\sin(2x)$ (Решаем уравнение, используя формулы приведения, формулы двойного угла для синуса и разложение на множители, способом вынесения общего множителя за скобки.)
2. $\cos(2x)-3\cos(x)+2=0$ (Используя формулу двойного угла для косинуса, получаем квадратное уравнение.)
3. $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=0$ (Однородное уравнение решаем методом деления на $\cos(x)\ne 0$)
4. $7cos^{2}x-\sin(x)∙\cos(x)-1=0$ (Представляем единицу через основное тригонометрическое тождество и получаем однородное уравнение второй степени.)
5. $\sin(x)+\cos(x)=1$ (Метод вспомогательного угла)
* **Теоретическая разминка. Математический диктант. Поставьте в соответствие каждому уравнению его решение.**

|  |
| --- |
| Математический диктант. Простейшие тригонометрические уравнения. Поставьте в соответствие каждому уравнению его решение. |
| Уравнения  |
| 1 | $$\cos(x)=1$$ | 5 | tgx= - 1 | 9 | tgx=0 | 13 | tgx= $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 2 | $$\sin(x)=-1$$ | 6 | ctgx=-1 | 10 | $$\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | 14 | $$\cos(x)=\pm 1$$ |
| 3 | $$\sin(x)=\frac{1}{2}$$ | 7 | $$\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | 11 | $$\sin(x)=\pm \frac{1}{2}$$ | 15 | сtgx= $\sqrt{3}$ |
| 4 | $$\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ | 8 | $$\cos(x)=-\frac{1}{2}$$ | 12 | $$\cos(x)=-\frac{3}{2}$$ | 16 | $$\sin(x)=\frac{π}{3}$$ |
| Решения  |
| с | $$x=- \frac{π}{4}+πn, n\in Z$$ | к | $$x=\pm \frac{π}{6}+2πn,n\in Z$$ | в | Не существует | А | $$x=2πn, n\in Z$$ |
| у | $$x=\pm \frac{π}{6}+πn,n\in Z$$ | о | $$x=\frac{π}{6}+πn, n\in Z$$ | л | $$x=- \frac{π}{2}+2πn, n\in Z$$ | С | $$x=\pm \frac{π}{4}+2πn,n\in Z$$ |
| ж | $$x=(-1)^{n}∙\frac{π}{3}+πn, $$$$n\in Z$$ | е | $$x=(-1)^{n}∙\frac{π}{6}+πn, n\in Z$$ | д | $$x=\pm \frac{2π}{3}+2πn,$$$$n\in Z$$ | р | $$x=πn, n\in Z$$ |
| а | $$x=\frac{3π}{4}+πn, n\in Z$$ | н | $$x=(-1)^{n}∙\frac{π}{4}+πn, n\in Z$$ | ю | $$x=\frac{π}{4}+πn, n\in Z$$ | ч | $$x=\pm \frac{5π}{6}+2πn,n\in Z$$ |
| Ответы  |
| 1 |  | 5 |  | 9 |  | 13 |  |
| 2 |  | 6 |  | 10 |  | 14 |  |
| 3 |  | 7 |  | 11 |  | 15 |  |
| 4 |  | 8 |  | 12 |  | 16 |  |

Проверяем правильность выполнения задания. Если вы правильно выполнили, то вы узнаете автора высказывания о математике:

***Математика - гимнастика ума. (Александр Васильевич Суворов – великий русский полководец, кавалер всех российских орденов своего времени)***

1. ***Основная часть. Решение уравнений.***
2. **Решите уравнение:**

$$\frac{\cos(2x)-\sin(x)-1}{2\cos(x)-\sqrt{3}}=0$$

Решение:

$$\frac{\cos(2x)-\sin(x)-1}{2\cos(x)-\sqrt{3}}=0\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}1-2sin^{2}x-\sin(x)-1=0;\\2\cos(x)-\sqrt{3}\ne 0;\end{array}\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sin(x)\left(2\sin(x)+1\right)=0;\\\cos(x)\ne \frac{\sqrt{3}}{2};\end{array}\right.\right.\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}\sin(x)=0;\\\sin(x)=-\frac{1}{2};\end{array}\right.\\\cos(x)\ne \frac{\sqrt{3}}{2};\end{array}\right.\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x=πn, nϵZ;\\x=-\frac{π}{6}+2πn, nϵZ;\\x=-\frac{5π}{6}+2πn, nϵZ;\end{array}\right.\\x\ne \pm \frac{π}{6}+2πn, nϵZ\end{array}\right.\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=πn, nϵZ;\\x=-\frac{5π}{6}+2πn, nϵZ.\end{array}\right.$$

**Ответ:** $-\frac{5π}{6}+2πn; πn, nϵZ$

Решив данное уравнение, мы нашли такие углы х, которые обращают данное уравнение в верное числовое равенство, при этом учитывали ОДЗ уравнения.

1. **Решите уравнение** $\left(2\sin(x)-1\right)\left(\sqrt{-\cos(x)}+1\right)=0$

**Решение:**

$$\left(2\sin(x)-1\right)\left(\sqrt{-\cos(x)}+1\right)=0 \leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\sin(x)=\frac{1}{2};\\\cos(x)\leq 0;\end{array}\right.\leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\left[\begin{array}{c}x=\frac{π}{6}+2πn, nϵZ;\\x=\frac{5π}{6}+2πn, nϵZ\end{array}\right.\\\cos(x)\leq 0;\end{array}\right.\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow x=\frac{5π}{6}+2πn, nϵZ$$

**Ответ:** $\frac{5π}{6}+2πn; πn, nϵZ$

**Решая данное уравнение, мы учитывали условия равносильных переходов. Для выбора ответа мы воспользовались свойствами косинуса угла:**

* **В каких четвертях находится угол, косинус которого отрицателен (II и III четвертях).**
* **Выберите точку, синус которой равен** $\frac{1}{2}$ **и расположенную в II или III четвертях.**

Таким образом, в задачах требовалось найти решения уравнений, удовлетворяющие поставленным условиям.

Тема нашего урока: Способы отбора корней при решении тригонометрического уравнения.

Причины отбора корней при решении уравнений:

* Отбор корней уравнения, удовлетворяющих ОДЗ уравнения.
* Отбор корней, удовлетворяющих равносильным переходам.
* Отбор корней уравнения, удовлетворяющих данному промежутку.
1. **Решите уравнение** $6sin^{2}x+15\sin((\frac{3π}{2}+x))-12=0$**. Найдите все корни этого уравнения, удовлетворяющие отрезку** $\left[-π;\frac{π}{2}\right]$

$$6sin^{2}x+15\sin(\left(\frac{3π}{2}+x\right))-12=0 \leftrightarrow 6\left(1-cos^{2}x\right)-15\cos(x-12=0)\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow 6cos^{2}x+15\cos(x)+6=0\leftrightarrow 2cos^{2}x+5\cos(x)+2=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\cos(x)=-2;\\\cos(x)=-\frac{1}{2};\end{array}\right.\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow x=\pm \frac{2π}{3}+2πn,n\in Z\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=\frac{2π}{3}+2πn,n\in Z;\\x=- \frac{2π}{3}+2πn,n\in Z.\end{array}\right.$$

Для проведения выборок корней тригонометрических уравнений можно предложить следующие приемы:

* Арифметический;
* Алгебраический;
* Геометрический;
* Графический.

Рассмотрим каждый из этих способов отдельно. После каждого способа учащиеся формулируют плюсы и минусы каждого способа.

1. *Арифметический.*

Выполним перебор значений целочисленного параметра n и вычисление соответствующих корней для каждого решения отдельно.

* При n==0 имеем x=$\frac{2π}{3}\notin \left[-π;\frac{π}{2}\right]$. Если $n\geq 0, то x\geq \frac{2π}{3}$

При n=-1 имеем x=$-\frac{4π}{3}\notin \left[-π;\frac{π}{2}\right]$**. Если** $n\leq -1, то x\leq -\frac{4π}{3}$. Дальнейший перебор не имеет смысла.

* При n==0 имеем x=$-\frac{2π}{3}∊\left[-π;\frac{π}{2}\right]$**.**

При **n=1, имеем x=**$\frac{4π}{3}\notin \left[-π;\frac{π}{2}\right]$**. Если** $n\geq 1, то x\geq \frac{4π}{3}$.

При n=-1 имеем x=$-\frac{8π}{3}\notin \left[-π;\frac{π}{2}\right]$**. Если** $n\leq -1, то x\leq -\frac{8π}{3}$. Дальнейший перебор не имеет смысла.

Итак, данное уравнение на отрезке $\left[-π;\frac{π}{2}\right]$ **имеет единственное решение** x=$-\frac{2π}{3}$

«+» данный способ самый простой для понимания.

«-» сложно определить с какого n начинать перебор, если концы заданного промежутка находятся далеко от 0 или заданный промежуток большой, или серии решений не являются табличными, содержат аркфункции.

1. *Алгебраический. Применение неравенств.*

Решение неравенств относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней.

Т.к. $–π\leq x\leq \frac{π}{2}$, то

$$–π\leq \frac{2π}{3}+2πn\leq \frac{π}{2}, nϵZ\leftrightarrow -1\leq \frac{2}{3}+2n\leq \frac{1}{2}, nϵZ\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow -\frac{5}{6}\leq n\leq -\frac{1}{12}, nϵZ-∅$$

$$–π\leq -\frac{2π}{3}+2πn\leq \frac{π}{2}, nϵZ\leftrightarrow -1\leq -\frac{2}{3}+2n\leq \frac{1}{2}, nϵZ\leftrightarrow $$

$\leftrightarrow -\frac{1}{6}\leq n\leq \frac{7}{12}, nϵZ\leftrightarrow n=0$. Тогда x=$-\frac{2π}{3}$.

«+» данный способ простой для понимания, алгебраический способ отбора корней удобен арифметического в тех случаях, когда последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям.

«-» достаточно громоздкий, затрачивает много времени, трудности в отборе корней, если серии решений не являются табличными, содержат аркфункции.

1. *Геометрический. Применение единичной тригонометрической окружности.*

Рассмотрим единичную тригонометрическую окружность. Выделим заданный отрезок. Отметим на окружности корни уравнения.

Из рисунка определяем корни уравнения, удовлетворяющие данному промежутку x=$-\frac{2π}{3}$..

«+» данный способ удобно использовать при отборе корней на промежутке, не превосходящем 2$π$ или в случае, когда решения уравнения не являются табличными. Является наиболее универсальным способом.

$$\frac{π}{2}$$

$$-\frac{2π}{3}$$

y

«-» сложности, если промежуток большой длины, тогда выбирают корни на меньшем промежутке и учитывают периодичность.

1. *Графический.*

При изображении решений уравнений иногда используют графики простейших тригонометрических функций. Для нахождения решения тригонометрического уравнения при этом подходе требуется схематичное построение графика простейшей тригонометрической функции.

x

y

«+» данный способ простой для понимания.

«-» затрачивает много времени, сложно построить график функции, если концы заданного промежутка находятся далеко от 0 или заданный промежуток большой.

1. **Закрепление материала.**

В решении некоторых уравнений выборку корней удобно производить не для аргумента x, а для kx или kx+b.

1. Решите уравнение $\sin(2x)+\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[π;2π\right]$

$$\sin(2x)+\cos(2x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\leftrightarrow \sin(\left(2x+\frac{π}{4}\right)=\frac{1}{2})\leftrightarrow 2x+\frac{π}{4}=\left(-1\right)^{n}\frac{π}{6}+πn, nϵZ\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow x=-\frac{π}{8}+\left(-1\right)^{n}\frac{π}{12}+\frac{πn}{2}, nϵZ\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}x=-\frac{π}{24}+πn, nϵZ\\x=\frac{7π}{24}+πm, mϵZ\end{array}\right.$$

Для выборки корней данного уравнения, удовлетворяющих поставленному условию можно воспользоваться решением неравенства на множестве целых чисел или разметкой на единичной тригонометрической окружности. Причем, удобнее на окружности отметить точки соответствующие углам , т.е. решения уравнения $\sin(\left(2x+\frac{π}{4}\right)=\frac{1}{2})$. Но тогда следует преобразовать область изменения аргумента:

$π\leq x\leq 2π, 2π\leq 2x\leq 4π,$

x

$$2π$$

$\frac{π}{2}$-$π$

$$\frac{π}{4}+2π$$

yx

$$\frac{π}{6}+4π$$

$$\frac{5π}{6}+2π$$

$$\frac{π}{4}+2π\leq 2x+\frac{π}{4}\leq \frac{π}{4}+4π.$$

$$2x+\frac{π}{4}=\frac{π}{6}+4π\leftrightarrow x=\frac{47π}{24}$$

$$2x+\frac{π}{4}=\frac{5π}{6}+2π\leftrightarrow x=\frac{31π}{24}$$

Ответ: $-\frac{π}{8}+\left(-1\right)^{n}\frac{π}{12}+\frac{πn}{2}, nϵZ$; $\frac{31π}{24}; \frac{47π}{24}$

1. Найдите корни уравнения $5\sin(x)+sin^{2}x=\cos(2x)+1$на отрезке $\left[\frac{π}{2};2π\right]$

Решение :

$$5\sin(x)+sin^{2}x=\cos(2x)+1\leftrightarrow 3sin^{2}x+5\sin(x)-2=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{c}\sin(x=-2)\\\sin(x)=\frac{1}{3}\end{array}\right.\leftrightarrow $$

$$\leftrightarrow x=\left(-1\right)^{n}arcsin\frac{1}{3}+πn, nϵZ$$

Выберем корни уравнения на отрезке $\left[\frac{π}{2};2π\right]$, используя единичную тригонометрическую окружность.

x

$$2π$$

$$\frac{π}{2}$$

y

$$π-arcsin\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$x=π-arcsin\frac{1}{3}$$

Ответ :а) $\left(-1\right)^{n}arcsin\frac{1}{3}+πn, nϵZ$

б) $π-arcsin\frac{1}{3}$

1. ***Подведение итогов урока, домашнее задание, выставление оценок.***

Учащиеся самостоятельно формулируют итог урока.

На сегодняшнем занятии мы рассмотрели 4 способа отбора корней в тригонометрических уравнениях, разобрали недостатки и достоинства каждого из них.

Домашнее задание:

Решите уравнения и выберите корни, принадлежащие данным отрезкам всеми способами

1. $-\sqrt{2}\sin(\left(-\frac{5π}{2}+х\right))∙\sin(х)=\cos(х)$ на $\left[\frac{9π}{2};6π\right]$
2. $\cos(2х)+3sin^{2}х=1,25$ на $\left[π;\frac{5π}{2}\right]$
3. $3sin^{2}х=3\sqrt{2}\sin((\frac{π}{2}-х))+4$ на $\left[-π;\frac{3π}{2}\right]$