Управление образования

Администрации Сергиево-Посадского района

Муниципальное общеобразовательное учреждение

«Физико-математический лицей»

**Открытый урок по теме**

 **«Комбинация шара с многогранниками»**

 Учитель: Чумичева Л.В.

2016-2017 учебный год

**Тема урок : *Комбинация сферы с многогранниками.***

**Тип урока: *Урок рефлексии (систематизации и обобщения полученных знаний)***

**Цели урока:** 1)формирование навыков при решении задач проводить методически грамотный анализ конфигурации, правильно понять условия взаимного расположения сферы (шара) и геометрических объектов;

2) проверка освоения обучающимися основных формул расчёта объёмов шаров, объёмов многогранников, радиуса сферы и т.п.;

3) развитие навыков работы в коллективе, умений четко и математически грамотно выражать свои мысли;

4) подготовка обучающихся к итоговой аттестации.

**Применяемые обучающие технологии:**

* ИКТ;
* Педагогика сотрудничества (разбиение материала на блоки, взаимо и самоконтроль);
* Здоровьесберегающие.

**Ход урока.**

**1.** ***Фронтальный опрос учащихся.***

1 слайд

*СФЕРА, ОПИСАННАЯ ОКОЛО МНОГОГРАННИКА.*

Вопрос. Какая сфера называется описанной около многогранника?

Какое необходимо условие для того, чтобы около многогранника можно было описать сферу?

**

2 слайд

Вопрос. Когда около пирамиды можно описать сферу ?



3 слайд.

Около призмы можно описать сферу тогда и только тогда, когда около основания этой призмы можно описать окружность. Ее центром будет

точка *O*, являющаяся серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.



Вопрос . Чему равен радиус сферы, если известны *h* – высота призмы, *r* – радиус окружности, описанной около основания призмы?

4 слайд.

Вопрос. Найдите радиус сферы, описанной около единичного куба.



5 слайд.

Ворос.Найдите радиус сферы, описанной около единичного тетраэдра.



6 слайд.

Найдите радиус сферы, описанной около единичного октаэдра



7 слайд.

**СФЕРА, ВПИСАННАЯ В МНОГОГРАННИК**

Вопрос. Какая сфера называется вписанной в многогранник?



Когда в прямую призму можно вписать сферу?

8 слайд.

Вопрос.Чему равен объем многогранника, если в него можно вписать сферу?



Найдите высоту правильной треугольной призмы и радиус, вписанной в нее сферы, если ребро основания призмы равно 1.

9 слайд.

Вопрос. В правильный тетраэдр вписана единичная сфера. Найдите ребро этого тетраэдра.



***2. Решение задач . (Вызываются учащиеся к доске.)***

**Задача 1.** Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания, как 3:4. Найти величину угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

(Чертёж выполняется в программе GeoGebra).



*Решение.* Пусть *а –* длина стороны квадрата, лежащего в основании пирамиды, *h* –длина высоты пирамиды и *R –* радиус описанной сферы.

Если построить сечение пирамиды и сферы плоскостью, проходящей через боковое ребро и высоту пирамиды, то из равенства

$SO∙OS\_{1}=AO∙OC$*;* $h\left(2R-h\right)=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^{2}$

Можно получить уравнение $h\left(\frac{3}{2}a-h\right)=\frac{a^{2}}{2}$,

 $2h^{2}+3ah+a^{2}=0;$

$2t^{2}-3t+1=0$, где $t=\frac{h}{a}.$

Квадратное уравнение имеет два корня : $t\_{1}=1 и t\_{2}=\frac{1}{2}$

Обозначив угол между плоскостью боковой грани и плоскостью основания через φ, получим

$$tgφ=\frac{OS}{OM}=\frac{2h}{a}=2t.$$

Получили два значения φ:

$$φ\_{1}=\frac{π}{4} и φ\_{2}=arctg2.$$

Ответ. $φ\_{1}=\frac{π}{4} и φ\_{2}=arctg2.$

**Задача2.**В пра­виль­ную ше­сти­уголь­ную пи­ра­ми­ду, бо­ко­вое ребро ко­то­рой равно 10, а вы­со­та равна 6, впи­са­на сфера. (Сфера ка­са­ет­ся всех гра­ней пи­ра­ми­ды.) Най­ди­те пло­щадь этой сферы.

**Ре­ше­ние.**

(Чертёж выполняется в программе GeoGebra).



Пусть MH — вы­со­та пра­виль­ной ше­сти­уголь­ной пи­ра­ми­ды MABCDEF  с вер­ши­ной M, тогда тре­уголь­ник AMH пря­мо­угольный, MA=10, MH=6,

от­ку­да $AH=\sqrt{MA^{2}-MH^{2}}=8.$

Тре­уголь­ник ABH  рав­но­сто­рон­ний, сле­до­ва­тель­но, AB=AH=8. В тре­уголь­ни­ке AMB  вы­со­та

$MN=\sqrt{MA^{2}-\left(\frac{AB}{2}\right)^{2}}=2\sqrt{21}$.

 В пра­виль­ном тре­уголь­ни­ке AHB вы­со­та

$NH=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

Центр O сферы, впи­сан­ной в пра­виль­ную ше­сти­уголь­ную пи­ра­ми­ду, лежит на её вы­со­те MH, точка K ка­са­ния сферы и бо­ко­вой грани AMB лежит на от­рез­ке MN. Тре­уголь­ни­ки MOK  и MNH по­доб­ны, по­это­му $MO:OK=MN:HN⟺ \left(6-r\right)∙4\sqrt{3}=2\sqrt{21}r ⟺r=4\sqrt{7}-8,$

Где r — ра­ди­ус сферы. Пло­щадь сферы $S=4πr^{2}=64\left(11-4\sqrt{7}π\right).$

Ответ:$ 64\left(11-4\sqrt{7}π\right)$ .

**Ука­жем дру­гой путь на­хож­де­ния ра­ди­у­са.**

Объем пи­ра­ми­ды равен

$$V=\frac{1}{3}S\_{осн}h=\frac{1}{3}∙\frac{64\sqrt{3}∙6}{4}∙6=192\sqrt{3}$$

Пло­щадь пол­ной по­верх­но­сти пи­ра­ми­ды равна

$$S\_{полн}=S\_{осн}+S\_{бок}=96\sqrt{3}+48\sqrt{21}.$$

 Тогда

$$r\_{сф}=\frac{3V}{S\_{полн}}=\frac{3∙192\sqrt{3}}{96\sqrt{3}+48\sqrt{21}}=\frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+\sqrt{21}}=4\sqrt{7}-8.$$

**Задача 3.** В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанной в пирамиду сферы и описанной около пирамиды сферы совпадают. Определить величину угла между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды.

*Решение*. (Чертёж выполняется в программе GeoGebra).



Пусть *О* – центр сферы вписанной в пирамиду и описанной около

пирамиды *SABCD* сферы. Построив сечение пирамиды и описанной сферы плоскостью *SAC* (*А* и *С –* противоположные вершины квадрата); пусть

*SO = R –* радиус описанной сферы, *ОО*1 *= r –* радиус вписанной сферы и

 *АВ* = *а* ( *АС = а*$\sqrt{2}$) как диагональ квадрата *ABCD,* лежащего в основании пирамиды. Поскольку сечением описанной сферы плоскостью *SAC* является круг, центр которого совпадает с центром сферы, то из равенства

 $SO\_{1}∙O\_{1}S\_{1}=AO\_{1}∙O\_{1}C$ по свойству хорд, проведенных в круге , где

*S*1 *–* точка пересечения прямой *SO* с описанной сферой,

имеем $ \left(R+r\right)\left(R-r\right)=\frac{a^{2}}{2}$, так как $O\_{1}C=\frac{AC}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \left(1\right).$

 Теперь построим сечение *KSL* пирамиды плоскостью, проходящей через высоту *SO1*  пирамиды и середины сторон *АВ* и *CD* квадрата *ABCD.* Эта плоскость пересечет вписанную сферу по большому кругу; пусть

$∠O\_{1}LS=γ$, тогда $∠O\_{1}LO=\frac{γ}{2}$ (центр вписанного круга в треугольник *KSL* лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов этого треугольника).

Так как $O\_{1}L=\frac{a}{2}, $то можем составить ещё два уравнения

$O\_{1}L=r=\frac{a}{2}tg\frac{γ}{2} \left(2\right) $и $O\_{1}S=R+r=\frac{a}{2}tgγ (3).$

Исключая из системы уравнений R, r и a, получим тригонометрическое уравнение $tg^{2}γ-2tg\frac{γ}{2}tgγ-2$=0.

Решив это уравнение, найдем $tg\frac{γ}{2}=\sqrt{\sqrt{2}-1}$ ,

$γ=2arctg\sqrt{\sqrt{2}-1}.$

Ответ. $γ=2arctg\sqrt{\sqrt{2}-1}.$

***3. Самостоятельная работа. (учащиеся выполняют тест)***

1 слайд.

1. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона которого равна 3. Одно из боковых ребер равно 2 и перпендикулярно плоскости основания. Найдите радиус описанной сферы.

**

2 слайд.

2. Найдите радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, боковые ребра которой равны 1, и плоские углы при вершине равны 90 градусов.



1. слайд.

3.Около правильной треугольной призмы, сторона основания которой

 равна 1, описана сфера радиуса 2. Найдите высоту призмы.



1. слайд.

4. В правильную треугольную призму вписана сфера радиуса 1. Найдите сторону основания и высоту призмы.



1. слайд.

5.Сфера вписана в прямую четырехугольную призму, в основании которой ромб со стороной 1 и острым углом 60 градусов. Найдите радиус сферы и высоту призмы.



1. слайд.

6. Единичная сфера вписана в правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна 4. Найдите высоту пирамиды.



***4. Подведение итогов урока.***