

Ирина Павловна Григал  
Анна Сергеевна Попкова

## **Компьютерное моделирование и изготовление дифракционных оптических элементов и голограмм**

В настоящее время голография широко применяется во многих областях науки, техники, промышленности. Голографическая интерферометрия позволяет зримо наблюдать малые деформации изделий при изменении нагрузки и распределение этих деформаций на поверхности тела [1]. Интересные возможности открываются при использовании голографии в информационных технологиях, в частности, в устройствах распознавания образов [2]. Специально изготовленные голограммы можно использовать в качестве дифракционных оптических элементов, заменяющих линзы [3]. Под дифракционным оптическим элементом понимают пропускающую или отражающую пластинку, способную изменять волновой фронт заданным образом. Примерами дифракционных оптических элементов являются дифракционная решетка, зонная пластинка Френеля, голограмма точки, линии, фокусатор в отрезок, в окружность. Дифракционные оптические элементы используют там, где существенны ограничения на размеры устройств, они с успехом заменяют громоздкие многолинзовые объективы, позволяют улучшать характеристики микроскопов и телескопов. С помощью дифракционных оптических элементов можно фокусировать свет в кривые различной формы, управлять световым излучением [3]. Дифракционные оптические элементы применяются в системах обработки и хранения информации, открывая перспективы создания ЭВМ нового типа.

Голография ("Holos" - все и "Grapho" - пишу) представляет собой способ записи полной информации о волновых поверхностях, исходящих от объекта, основанный на явлении интерференции. Интерферируют между собой волновой фронт объекта (волна, отраженная от объекта, несущая информацию о его форме и размерах) и так называемая опорная волна, необходимая, чтобы интерференция вообще произошла. Основная сложность, возникающая на этапе записи голограмм, состоит в том, что даже небольшие дро-

жания объекта, экрана и других деталей голографической установки приводит к смещению интерференционных полос и смазыванию изображения на фотопластинке.

В данной работе предлагается заменить этот этап фотографированием смоделированной на компьютере интерференционной картины с экрана монитора. Изготавливаемые таким образом голограммы представляют собой негативы, полученные на фотоленке. В этом случае удастся избежать сложностей, связанных с неустойчивостью интерференционной картины, а необходимая степень уменьшения рассчитанной картины обеспечивается удалением фотоаппарата от монитора на нужное расстояние.

### Этапы изготовления голограмм

Процесс изготовления голограмм включает в себя несколько этапов:

- 1) Компьютерное моделирование голограмм и дифракционных элементов.
- 2) Перенесение смоделированного изображения на фотоматериал.
- 3) Процесс восстановления изображений. Расчет интерференционных картин

При расчете интерференционной картины для изображения колебаний удобно пользоваться представлением векторных диаграмм [4, с. 158].

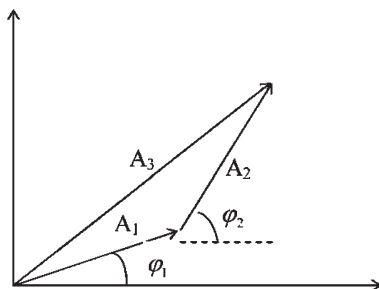


Рис. 1

Согласно этому представлению колебание электрического поля  $E_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$  изображается в виде вектора с длиной, равной амплитуде  $A_1$ , повернутого относительно оси абсцисс на угол, равный фазе  $\varphi_1$  (рис. 1). Аналогичным обра-

зом изображается колебание поля  $E_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$ . Тогда результат сложения колебаний будет геометрической суммой векторов, изображающих первое и второе колебание, и его амплитуда  $A_3$  будет определяться из теоремы косинусов для треугольника, образованного векторами на рис. 1.

$$A_3^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 \cdot A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (1)$$

Если первое колебание соответствует опорной волне, падающей под прямым углом к плоскости экрана, то фаза  $\varphi_1$  не будет зависеть от координат  $(x, y)$  в плоскости экрана и ее можно положить равной нулю:  $\varphi_1 = 0$ . Фаза же  $\varphi_2$ , соответствующая волне от предмета, меняется от точки к точке на экране:  $\varphi_2 = \varphi(x, y)$ . Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, таким образом, рассчитывая по формуле (1) квадрат амплитуды результирующего колебания, мы, фактически, определяем интенсивность интерференционной картины в данной точке экрана.

### Голограмма точки

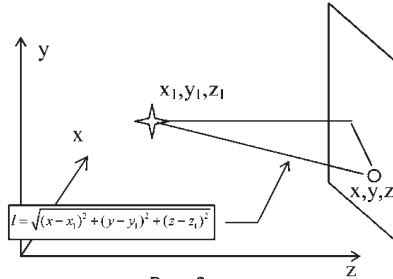


Рис. 2

Рассмотрим случай простейшего объекта, представляющего собой светящуюся точку (рис. 2). Расстояние от точечного источника до точки экрана с координатами экрана  $x, y, z$  будет определяться по известной формуле для длины отрезка:  $l = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}$ , где  $x_1, y_1, z_1$  - координаты точечного источника. Фаза  $\varphi_2$  будет равна количеству длин волн, уместившихся на этом отрезке, умноженному на  $2\pi$ :

$$\varphi_2(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} \quad (2)$$

Таким образом, задав положение экрана координатой  $z$ , а положение точечного источника координатами  $x_1, y_2, z_3$

можно рассчитать, подставив формулу (2) в (1), интенсивность  $I(x,y)$  в любой точке экрана  $(x,y)$ .

На рисунке 3 представлена рассчитанная голограмма для точечного источника. Так как голограмма представляет собой запись информации о волновом фронте предмета, а волновые поверхности точечного источника представляют собой концентрические сферы, то довольно естественно, что голограмма в этом случае является системой концентрических окружностей. Значения амплитуд  $A_1, A_2$  могут выбираться произвольно, но целесообразно их сделать равными:  $A_1=A_2=A$ . В этом случае интенсивность будет изменяться наиболее значительно: от нуля до значения  $4A^2$ , и контрастность интерференционной картины будет максимальной.

### Голограмма нескольких точек

Формула (1) обобщается на случай  $N$  точек следующим образом:

$$I=A_1^2+A_2^2+\dots+A_N^2+2A_1A_2\cos(\varphi_1-\varphi_2)+2A_1A_3\cos(\varphi_1-\varphi_3)+\dots+2A_2A_3\cos(\varphi_2-\varphi_3)+\dots+2A_{N-1}A_N\cos(\varphi_{N-1}-\varphi_N), \quad (3)$$

то есть сначала суммируются квадраты амплитуд всех источников, а потом - всевозможные их попарные произведения, умноженные на косинус разности фаз между колебаниями.

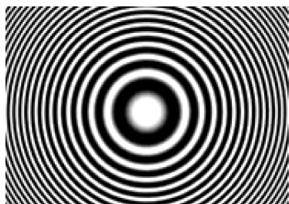


Рис. 3

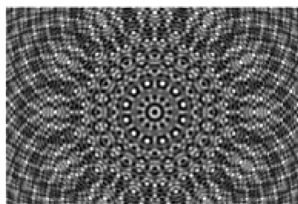


Рис. 4

При расчетах амплитуду опорного пучка  $A_1$  рекомендуется задавать в  $N$  раз большей, чем амплитуды точечных источников, иначе его вклад будет не заметен на фоне суммарной интенсивности, создаваемой группой точек.

На рисунке 4 представлена голограмма двенадцати точек. Довольно затейливый узор уже мало напоминает интерференционную картину, получаемую от одной точки (рис.3).

Теоретически, с помощью большого числа точек можно составить изображение любого предмета и рассчитать голограмму произвольного объекта. Однако, с ростом числа

точек стремительно возрастает время расчетов, что сильно затрудняет компьютерное моделирование голограмм сложных объектов. Тем не менее, в ряде специальных случаев, которые будут рассмотрены ниже, симметрия объектов позволяет существенно уменьшить время расчетов.

### Голограмма линии и отрезка

В случае бесконечной горизонтальной прямой интенсивность так же, как и в случае точечного источника, может быть рассчитана по простой формуле (1), но вследствие бесконечной протяженности линии из выражения для фазы исключается зависимость от координаты  $x$ :

$$\varphi_2(y, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \quad (4)$$

Голограмма линии представлена на рисунке 5. Волновые поверхности, соответствующие светящейся линии, представляют собой соосные цилиндры, поэтому голограмма линии является системой полос, симметричной относительно горизонтальной оси.



Рис. 5

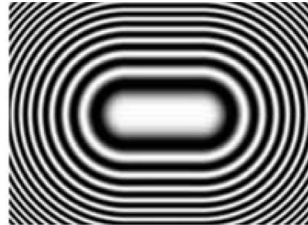


Рис. 6

Для получения голограммы отрезка нужно суммировать амплитуды очень большого числа точек, расположенных на отрезке. Но это, как уже говорилось, требует значительного времени расчетов. Поэтому мы предлагаем использовать модель голограммы, представляющую собой "сшивку" голограммы линии и голограмм двух крайних точек (рис. 6), что реализуется с помощью кусочно-заданной функции для фазы  $\varphi_2$ .

$$\varphi_2(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{(x - (x_1 - 1/2))^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} & | x < x_1 - 1/2 \\ \sqrt{(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} & | x_1 - 1/2 < x < x_1 + 1/2 \\ \sqrt{(x - (x_1 + 1/2))^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} & | x > x_1 + 1/2 \end{cases}, \quad (5)$$

где  $x_1, y_1, z_1$  - положение центра отрезка,  $l$  - его длина.

Строго говоря, картина, изображенная на рисунке 6, не является голограммой отрезка, так как при восстановлении изображения получается отрезок с двумя ярко светящимися точками по краям ("гантель"). Поэтому дифракционный элемент, задаваемый формулой (5), правильнее будет называть "фокусатором в отрезок".

### **Фокусатор в окружность**

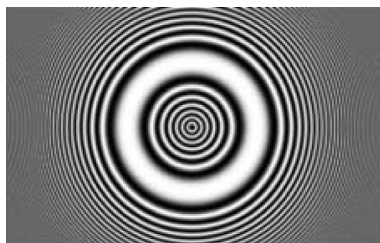


Рис. 7

При взгляде на голограмму линии (рис. 5) возникает мысль свернуть ее в кольцо и получить фокусатор в окружность (рис. 7). Формула, описывающая фазу  $\varphi_2$  в формуле (1), для фокусатора в окружность примет вид:

$$\varphi_2(r, z) = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{(r-R)^2 + (z-z_1)^2} \quad (6)$$

где  $z_1$  - координата центра в окружности;  $R$  - радиус окружности;  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x, y$  координаты точки экрана. Снова следует оговориться, что картина, рассчитанная по формуле (6), строго говоря, не является голограммой светящейся окружности, которая может быть получена суммированием вкладов большого числа точек на окружности.

### **Преобразование рассчитанной интенсивности в координаты яркости экрана**

Главной задачей на этом этапе является преобразование значения интенсивности  $I(x, y)$  точки экрана с координатами  $(x, y)$  в значение яркости пикселя монитора. В цветных мониторах яркость и цвет задается с помощью специальной функции  $rgb(R, G, B)$ , зависящей от трех координат:  $R$  (красный),  $G$  (зеленый),  $B$  (синий). Изменяя числа  $R, G, B$  в пределах от 0 до 255, можно получать более десяти миллионов от-

тенков цвета. Так как голограммы представляют собой узоры из оттенков серого цвета, все три координаты R,G,B в нашем случае должны равняться одному и тому же числу: черный будет задаваться как `rgb(0,0,0)`, темно-серый - как `rgb(100,100,100)`, а белый будет иметь координаты с максимальным значением - `rgb(255,255,255)`. Ниже приводится фрагмент программы на языке Паскаль (среда программирования Borland Delphi 3), в котором пикселю (pixel) с координатами [3,16], расположенному на "холсте" (canvas) формы №1 (окна, в котором работает программа), присваивается значение яркости, соответствующее одному из оттенков серого (яркость =150):

```
Form1.Canvas.Pixels[3,16]:=rgb(150, 150, 150).
```

Для того, чтобы самые темные участки голограммы изображались пикселями черного цвета, а самые светлые - пикселями белого цвета, диапазон изменения рассчитанной интенсивности (в большинстве случаев это интервал от  $I_{\min}=0$  до  $I_{\max}=4A^2$ ) необходимо разбить на 255 частей и помножить на интенсивность в данной точке:

$$\text{яркость}(x, y) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{255} (I(x, y) - I_{\min}). \quad (7)$$

### **Фотографирование с экрана монитора**

Следующим этапом получения голограмм является фотографическая съемка с экрана монитора. Экран с хорошим разрешением содержит порядка тысячи пикселей вдоль меньшего измерения. С другой стороны, количество минимально разрешимых элементов на обычной черно-белой фотопленке Свема 64 тоже порядка тысячи. Поэтому, целесообразно фотографировать с такого расстояния, чтобы экран занимал все поле зрения фотоаппарата. При этом достигается необходимая степень уменьшения интерференционной картины (~10 раз для экрана в 17 дюймов). Рекомендуемая выдержка - 1/30 секунды. За это время при частоте смены кадров на мониторе 85Гц изображение успевает развернуться три раза. Далее, отснятый фотоматериал требуется проявить, полученные при этом негативы будут представлять собой готовые голограммы.

## Восстановление изображений

Установка для восстановления изображений показана на рисунке 8. Свет от лазерной указки направляется в конфокальную систему из двух линз (короткофокусной и длиннофокусной), которая позволяет расширить параллельный пучок света до диаметра, достаточного для освещения всего фотографического кадра (телескопирование пучка). На выходе телескопа ставится слайд дифракционного оптического элемента, результат дифракции света на котором наблюдается на экране.



Рис. 8

Полученные негативы обладают главным свойством голограмм: каждый их фрагмент содержит информацию обо всем объекте. Если закрыть часть слайда, то изображение на экране останется, только немного потускнеет.

## Реализация схемы Лейта-Упатниекса

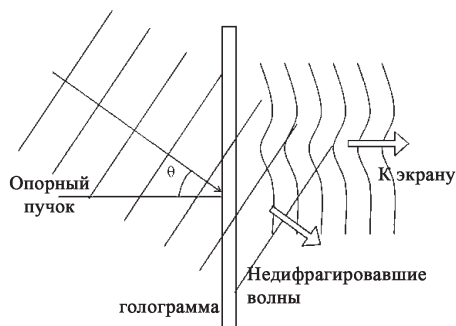


Рис. 9

Описанная выше методика расчетов позволяет получить голограммы, соответствующие схеме Габора, в которой источник света и объект расположены на оси голограммы. Схема Габора обладает тем существенным недостатком, что при восстановлении лучи, образующие действительное и мнимое изображения, а также пучок нулевого порядка,



распространяются в одном и том же направлении и создают взаимные помехи. Это - главная из причин низкого качества восстановленных изображений по такой схеме.

Другая схема, предложенная Е. Лейтом и Ю. Упатниексом, свободна от этих недостатков. При численном моделировании схема Лейта-Упатниекса реализуется путем изменения формулы для расчета интенсивности (1): фаза опорного пучка  $\varphi_1$  более не полагается равной не нулю, как ранее (случай падения под прямым углом), а заменяется выраже-

нием  $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sin \theta \cdot x$ , что соответствует опорному пучку, падающему на пластинку под углом падения  $\theta$ . При восстановлении изображений такие голограммы требуется освещать также под углом  $\theta$ . В этом случае излучение лазера, не претерпевшее дифракцию на голограмме, будет распространяться в ту же сторону, что и падающий луч, а дифрагировавшие волны, ответственные за изображение, в другую сторону под прямым углом к плоскости голограммы (рис.9).

### **Изготовление дифракционных решеток**

При изготовлении дифракционных решеток фотосъемка производится так, как описано в разделе "Восстановление изображения". Картина, состоящая из чередующихся темных и светлых полос, рассчитывалась программно, но ее можно также легко получить простым копированием в любом графическом редакторе фрагмента структуры, состоящей из одной темной и одной светлой полосы. Задавая минимально возможные ширины черной и светлой полосы в один пиксель, таким способом можно получить решетку 25 штрихов на мм. Для демонстрации действия решетки достаточно просто осветить ее лучом лазера. На экране появятся хорошо различимые максимумы первого и более старших порядков.

### **Результаты**

Разработанная методика позволяет получать голограммы простейших объектов. Были получены голограммы точки, нескольких точек, соответствующие двум схемам записи голограмм: Габора и Лейта-Упатниекса. Были также изготовлены другие виды дифракционных оптических элементов -

фокусаторы в отрезок, в кольцо, в линию, дифракционные решетки (5, 8 и 25 штрихов на миллиметр). Полученные голограммы точки имеют до 600 разрешимых колец.

Фотометрические измерения, проведенные для полученных дифракционных решеток, позволили оценить их дифракционную эффективность, определяемую, как отношение интенсивности первого максимума дифракционной картины к интенсивности света в нулевом максимуме, соответствующую недифрагировавшему свету. Также были проведены измерения дифракционной эффективности голограммы точки, определяемой как отношение энергии, собранной в точке, к энергии всего пучка. Результаты измерений приведены в таблице 1. Можно видеть, что дифракционная эффективность наименьшая для структур с наибольшей плотностью деталей (решетка 25 штр/мм, голограмма точки).

Таблица 1.

Вид дифракционного элемента	Дифракционная эффективность
Диф. решетка 5 штр/мм	(10,4+/-0.7) %
Диф. решетка 8 штр/мм	(19+/-1)%
Диф. решетка 25 штр/мм	(2,4+/-0,2)%
Голограмма одной точки (фокусное расстояние - 1м)	(2,3+/-0,5)%

### **Заключение**

Разработанная методика позволяет получать различные дифракционные оптические элементы: дифракционные решетки, фокусаторы в точку, линию, отрезок, в кольцо. К достоинствам описанной методики можно отнести простоту ее осуществления в сочетании с относительно высоким качеством получаемых структур (до 600 колец в голограмме точки, до 25 штр/мм в дифракционной решетке).

Работа интересна также с методической точки зрения, так как описанная технология создания дифракционных оптических элементов и способ их демонстрации могут быть воспроизведены в любой школе, где имеется компьютер.

Работа проводилась на Всероссийской Летней экологической школе (ЛЭШ 2002) и продолжена в Вечерней Астрономической Школе при Государственном Астрономическом институте имени Штернберга (Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова).

### **Литература**

1. Сойфер В.А. Компьютерная оптика. Ч. 1. Дифракционные оптические элементы // Соросовский образовательный журнал, 1999. - №4, С. 110.
2. М. Миллер. Голография // Л. Машиностроение, 1979. - С. 17.
3. Ландсберг Г.С. Оптика. - М. Наука, 1976.
4. Островский Ю.И. Голография и её применение. - М. Наука, 1973. - С. 32.

Печатается по материалам вестника  
Московского государственного университета  
"ЛЕСНОЙ ВЕСТНИК",  
специализированный выпуск "ФИЗИКА",  
Стр. 148-154, № 3(34), 2004.